

SÉRIE A, n° 659.

N° D'ORDRE

1405.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

M. MENNERET.

1^{re} THÈSE. — MOUVEMENT OSCILLATOIRE ET MOUVEMENT UNIFORME DES LIQUIDES DANS LES TUBES CYLINDRIQUES. — COEFFICIENT DE FROTTEMENT INTERNE.

2^e THÈSE. — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le *10 Mai* 1911, devant la Commission d'Examen.

MM. BOUTY, *Président.*

URBAIN, }
LEDUC, } *Examineurs.*

GRENOBLE

IMPRIMERIE ALLIER FRÈRES

Cours de Saint-André, 26

1911



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551602_0017

18/11

SÉRIE A, n° 659.

N° D'ORDRE

1405.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

M. MENNERET.

1^{re} THÈSE. — MOUVEMENT OSCILLATOIRE ET MOUVEMENT UNIFORME DES LIQUIDES DANS LES TUBES CYLINDRIQUES. — COEFFICIENT DE FROTTEMENT INTERNE.

2^e THÈSE. — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le *10 Mai* 1911, devant la Commission d'Examen.



MM. BOUTY, *Président.*

URBAIN, }
LEDUC, } *Examineurs.*

GRENOBLE

IMPRIMERIE ALLIER FRÈRES

Cours de Saint-André, 26

1911

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen P. APPELL, *Professeur*. Mécanique rationnelle.

Doyen honoraire G. DARBOUX, — Géométrie supérieure.

Professeurs honoraires. {
L. TROOST.
Ch. WOLF.
J. RIBAN..

Professeurs {
LIPPMANN..... Physique.
BOUTY..... Physique.
BOUSSINESQ Physiq. mathém. et calcul des probabilités.
PICARD..... Analyse supérieure et algèbre supérieure.
H. POINCARÉ Astronomie mathém. et mécanique céleste.
Y. DELAGE Zoologie, anatomie, physiologie comparée.
G. BONNIER..... Botanique.
DASTRE..... Physiologie.
KÖENIGS Mécanique physique et expérimentale.
VÉLAIN..... Géographie physique.
GOURSAT Calcul différentiel et calcul intégral.
CHATIN..... Histologie.
HALLER Chimie organique.
JOANNIS Chimie (Enseignement P. C. N.).
JANET Physique.
WALLERANT..... Minéralogie.
ANDOYER..... Astronomie physique.
PAINLEVÉ..... Mathématiques générales.
HAUG..... Géologie.
HOUSSAY..... Zoologie.
H. LE CHATELIER.... Chimie.
Gabriel BERTRAND.... Chimie biologique.
M^{me} P. CURIE..... Physique générale.
CAULLERY..... Zoologie (Évolution des êtres organisés).
C. CHABRIÉ..... Chimie appliquée.
G. URBAIN..... Chimie.
E. BOREL..... Théorie des fonctions.
MARCHIS..... Aviation.
Jean PERRIN..... Chimie, physique.
G. PRUVOT..... Zoologie, anatomie, physiologie comparée.
N..... Calcul différentiel et calcul intégral.
N..... Application de l'analyse à la géométrie.

Professeurs-adjoints .. {
PUISEUX..... Mécanique et astronomie.
LEDUC Physique.
MATRUCHOT..... Botanique.
MICHEL..... Minéralogie.
HÉROUARD..... Zoologie.
Léon BERTRAND..... Géologie.
Rémy PERRIER..... Zoologie (Enseignement P. C. N.).
MOLLIARD..... Physiologie végétale.
COTTON..... Physique.

Secrétaire D. TOMBECK.

PREMIÈRE THÈSE

MOUVEMENT OSCILLATOIRE

ET

MOUVEMENT UNIFORME DES LIQUIDES

DANS LES

TUBES CYLINDRIQUES

COEFFICIENT DE FROTTEMENT INTERNE

INTRODUCTION — HISTORIQUE

DEFINITIONS

De nombreuses recherches, tant expérimentales que théoriques, ont déjà été faites sur la viscosité des liquides.

Dans le *Bulletin des sciences physiques de la Sorbonne* (1888), M. Couette a fait, d'après les mémoires originaux, un excellent résumé historique de la question. D'autre part, M. Brillouin a publié en 1907 ses leçons sur la viscosité des liquides et des gaz.

J'ai eu recours à la fois à ces deux sources et aux mémoires originaux pour résumer l'état actuel de cette question en m'attachant surtout au côté expérimental.

Je rappellerai d'abord que *dans les fluides en mouvement*, les

forces moléculaires ont une composante tangentielle. Si, en effet, on calcule le débit d'un liquide s'écoulant par un tube, en appliquant simplement le principe de Torricelli, on trouve toujours un résultat plus grand que celui que donne l'expérience. Darcy (*Mémoires des Savants étrangers*, tome XV) a d'ailleurs montré, par des expériences directes, que cet écart est dû surtout à ce que la vitesse va en diminuant progressivement depuis l'axe du tube jusqu'à la paroi où elle est nulle. Les couches voisines ont donc des vitesses différentes, entre elles se produit un frottement; donc pour maintenir ces vitesses, il faut dépenser du travail. Cet écart, par rapport au principe de Torricelli, se présente d'ailleurs, mais avec des valeurs différentes, aussi bien dans le régime de Poiseuille que dans le régime hydraulique.

On appelle *viscosité* cette propriété que possèdent les fluides réels pendant le mouvement et qui consiste en ce que les forces moléculaires ont une composante tangentielle.

C'est en 1822 que, dans un mémoire lu à l'Académie des Sciences, Navier a établi les équations différentielles générales du mouvement des fluides, en tenant compte de leur viscosité, et on peut dire que jusqu'à maintenant ces équations ont servi de base à toute étude théorique et expérimentale sur ce sujet. J'exposerai cependant dans la première partie de ce travail une méthode expérimentale permettant de déterminer le coefficient caractéristique du frottement des liquides indépendamment de toute base théorique et de toute hypothèse. M'attachant surtout au point de vue expérimental, je ne rappellerai pas les équations de Navier puisqu'elles ne doivent pas me servir dans la méthode que j'ai étudiée. Je me contenterai de rappeler que ce qu'on appelle coefficient de viscosité d'un liquide ou coefficient de frottement intérieur, c'est le coefficient η des dérivées secondes des équations de Navier. On peut donner du coefficient η la signification physique suivante :

η représente la force à appliquer par centimètre carré de surface pour que la vitesse V du liquide parallèle à la paroi augmente de l'unité quand la distance à la paroi augmente de 1 centimètre.

L'intégration des équations de Navier conduit à une relation entre le coefficient η et les données de l'expérience. Cette intégration n'a pu être effectuée que dans un petit nombre de cas, principalement :

- 1° Ecoulement uniforme dans un tube cylindrique;
- 2° Entraînement d'un liquide compris entre un plan fixe (ou un cylindre fixe) indéfini et un second plan (ou cylindre) indéfini parallèle au premier et animé d'un mouvement de translation uniforme parallèle aux génératrices;
- 3° Entraînement d'un liquide compris entre deux cylindres de même axe, l'un fixe, l'autre tournant d'un mouvement uniforme;
- 4° Oscillations tournantes d'un solide de révolution à l'intérieur d'un liquide.

RESULTATS EXPERIMENTAUX FOURNIS PAR CES DIVERSES METHODES

Disons d'abord que la deuxième est irréalisable. Les trois autres ont été effectivement employées et on peut dire d'une façon générale : l'expérience s'accorde d'une manière remarquable avec les équations de Navier tant que les vitesses relatives ne dépassent pas certaines limites; au delà, l'accord n'existe plus : on trouve des valeurs de η qui vont rapidement en croissant avec la vitesse.

A quoi tient ce désaccord pour les grandes vitesses (régime hydraulique). Il y a lieu de penser que le coefficient η conserve une valeur constante et que le désaccord provient de l'hypothèse introduite, savoir : les vitesses des molécules sont parallèles à la paroi. On peut penser avec M. Maurice Lévy (thèse de doctorat) que si les trajectoires des molécules peuvent être, dans certains cas, rectilignes (faibles vitesses ou régime de Poiseuille), elles peuvent être, dans d'autres cas, plutôt sinueuses (grandes vitesses ou régime hydraulique), ou, comme on dit

encore, admettre qu'il existe dans le liquide des mouvements tourbillonnaires.

I. — Méthode de l'écoulement uniforme dans un tube cylindrique.

Les plus anciennes expériences ont été effectuées par de Prony et publiées dans ses *Recherches mathématiques sur la théorie des eaux courantes en 1804*. Elles ont porté uniquement sur les tuyaux larges employés pour la conduite des eaux. Le résultat obtenu est le suivant : la perte de charge par unité de longueur est à peu près proportionnelle au carré de la vitesse moyenne.

Un peu plus tard, Girard (*Mémoires de l'Institut*, 1813-1814-1815) reprend cette étude, mais avec des tubes étroits sans donner de résultats précis.

Poiseuille (*Mémoires des Savants étrangers*, 1846), en opérant sur des tubes de très faible diamètre, met en évidence cette loi très précise :

La perte de charge par unité de longueur est proportionnelle à la vitesse moyenne.

Y a-t-il donc une loi pour les tubes étroits, une autre pour les tubes larges ?

C'est alors que Darcy (*Mémoires des Savants étrangers*, tome XV, 1857) montre que dans un même tube la perte de charge est proportionnelle à la vitesse tant que la charge, et par suite la vitesse, ne dépasse pas une certaine limite et que, au delà, la perte de charge devient à peu près proportionnelle au carré de la vitesse (1,92 d'après Darcy).

Donc : l'écoulement uniforme d'un liquide dans un tube donné peut se faire suivant deux régimes.

Quelles sont les conditions qui gouvernent le passage d'un régime à l'autre ? — Hagen, physicien et ingénieur allemand, rapporte sur ce sujet des expériences publiées en 1854 dans les *Habhandlungen* de Berlin. Son mémoire contient beaucoup de

bonnes expériences, mêlées à une interprétation théorique inexacte du passage d'un régime à l'autre. Il a cependant le mérite d'avoir su le premier (simultanément avec Darcy) distinguer nettement les deux régimes et surtout donner des phénomènes une description correcte. Depuis, Reynolds, puis M. Couette en ont donné une description analogue.

Lorsqu'on examine attentivement la veine liquide qui s'échappe du tube, on observe, en faisant croître progressivement la charge et par suite la vitesse, les phénomènes suivants :

Pour les faibles vitesses, la veine liquide est parfaitement tranquille, lisse et régulière sur une grande longueur. C'est le premier régime ou régime de Poiseuille : la vitesse est partout parallèle à l'axe du tube.

A partir d'une certaine vitesse, la veine liquide commence à se troubler, elle est agitée de brusques soubresauts affectant tantôt l'aspect précédemment décrit, tantôt celui qui suit. A chaque changement, l'amplitude de la parabole varie brusquement.

A partir d'une vitesse plus grande encore, mais pas très éloignée de la précédente, la veine liquide devient de nouveau tranquille et régulière, mais elle n'est plus aussi transparente que précédemment, elle est plutôt ridée et même de petites gouttelettes s'en échappent latéralement. C'est le deuxième régime appelé régime hydraulique.

On se rend compte ainsi que la courte période pendant laquelle se produisent les soubresauts est une période de régime instable et représente le passage du premier au deuxième régime.

Entraîné par une interprétation théorique inexacte du changement de régime, Hagen n'a pas su déduire de ses expériences la véritable loi reliant la période de transition aux autres propriétés du liquide étudié. Il faut aller jusqu'à Osborn Reynolds pour trouver la véritable loi.

Vitesse critique, loi de Reynolds. — Dans un mémoire publié aux *Philosophical transactions Royal Society of London* en

1883, Osborn Reynolds, s'appuyant uniquement sur des considérations d'homogénéité, conclut d'un raisonnement approché que : le passage du premier au deuxième régime se produit pour une certaine valeur V_c de la vitesse moyenne qu'il appelle vitesse critique donnée par $\frac{\mu r V_c}{\eta} = \text{constante}$ (indépendante du

tube et du liquide). Expression dans laquelle :

μ est la masse spécifique du liquide ;

r rayon du tube ;

η coefficient de frottement du liquide.

Reynolds a du reste étudié expérimentalement ce passage dans deux séries d'expériences publiées dans les *Philosophical transactions* en 1895.

Dans la première série d'expériences, le passage d'un régime à l'autre est rendu visible par un élégant dispositif consistant à laisser pénétrer dans l'axe du tube étudié un mince filet de liquide coloré. Tant que la vitesse reste inférieure à la vitesse critique, ce filet reste rectiligne en suivant l'axe du tube sur toute sa longueur. A partir de la vitesse critique, ce filet se brouille et se mélange à la masse entière de l'eau dans le tube. En éclairant avec des étincelles, on distingue alors la formation de tourbillons. Reynolds juge la détermination de V_c peu précise par cette méthode et dans la deuxième série d'expérience il a recours à la méthode directe : mesure du débit et de la chute de pression entre deux points assez éloignés des extrémités du tube. En représentant graphiquement ces résultats, il en déduit nettement que :

1° Le régime de Poiseuille cesse d'exister pour une certaine valeur V_1 de la vitesse moyenne ;

2° Qu'après une période de trouble, le régime hydraulique est et reste établi pour une vitesse moyenne égale à $1,2 V_1$ environ. La vitesse critique est donc comprise entre ces deux valeurs. Pour faire varier η , Reynolds opère toujours avec l'eau, mais en faisant varier la température.

L'ensemble de ses résultats le conduit à la loi de Reynolds :

$$\frac{\mu \cdot r \cdot V_c}{\eta} = 1000.$$

Ce résultat est confirmé par les expériences de M. Couette (thèse, 1890) et par les expériences de Barnes et Coker en Angleterre. Il est d'ailleurs d'accord avec les expériences antérieures de Hagen. Je donne (chapitre 1^{er} de la deuxième partie de ce travail) quelques bonnes vérifications de cette loi.

Régime de Poiseuille. — Poiseuille a publié ses expériences dans le *Recueil des Savants étrangers*, tome IX, 1846. La théorie en a été faite par Stokes en 1847 en partant des équations de Navier et en supposant le liquide en repos le long de la paroi. On obtient ainsi pour l'expression du débit en centimètres cubes par seconde :

$$D = \frac{\pi r^4 g H \mu}{8 \eta l}$$

H^{cm} étant la différence de charge, mesurée en colonne de liquide, qui existe entre les deux extrémités du tube de longueur l .

Je crois inutile de rapporter les détails de l'appareil de Poiseuille et de rappeler quels soins minutieux il apporta dans toutes ses mesures.

Poiseuille divise ses expériences en deux séries.

Les expériences de la première série, dans lesquelles la vitesse moyenne est très faible, vérifient très exactement la formule précédente en général.

Les expériences de la deuxième série donnent un débit notablement inférieur à celui que l'on calcule au moyen de la formule précédente et de la valeur de η donnée par la première série. Pour un tube donné, on passe insensiblement de la première à la deuxième série en faisant croître progressivement la vitesse moyenne V . L'écart entre l'expérience et la théorie se montre d'autant plus grand que la vitesse est plus grande et cependant les vitesses dont il s'agit ici sont notablement inférieures à la vitesse critique V_c . Elles appartiennent donc encore

au premier régime. Mais si on applique la formule précédente non plus au tube entier, mais en prenant la différence de charge H_1 entre deux points A et B séparés par une longueur l_1 et assez éloignés des extrémités, la formule théorique se trouve parfaitement vérifiée. Ceci résulte des expériences :

1° De Reynolds, dans lesquelles il mesure directement la différence de charge H_1 entre deux points A et B ;

2° De M. Couette, dans lesquelles l'auteur réalise le même débit à travers deux tubes de même rayon r , mais de longueurs différentes l' et l'' . Il mesure les différences de charge H_1 et H_2 respectivement entre les deux extrémités de l' et de l'' . Tandis que la formule théorique ne s'applique à aucun des deux rapports $\frac{H_1}{l'}$ et $\frac{H_2}{l''}$, elle s'applique au rapport $\frac{H_1 - H_2}{l' - l''}$. Ceci revient à éliminer par différence les extrémités des tubes ;

3° On trouvera plus loin quelques expériences que j'ai effectuées en éliminant également les extrémités et qui vérifient bien la formule.

On peut donc conclure de là que quand la formule ne s'applique plus au tube entier, cela tient à ce qu'il existe (à l'entrée surtout) une perturbation donnant lieu à une perte de charge (puisque la différence de charge H , entre les deux bouts du tube, introduite dans la formule donne un débit trop grand).

Cette perte de charge ϵ est employée à donner au liquide sa force vive. On doit donc, pour le tube entier, introduire dans la formule non pas H , mais

$$H_0 = H - \epsilon.$$

H_0 représente alors la charge absorbée uniquement par les frottements.

H est mesurable directement, ϵ ne l'est pas.

On peut alors, dans le but d'obtenir la valeur exacte de γ :

1° Ou bien donner au liquide une vitesse assez faible pour que ϵ soit négligeable. C'est le cas des expériences de Poiseuille (1^{re} série) ;

2° Ou bien éliminer ε par une disposition particulière, comme dans les expériences de Reynolds, de M. Couette, indiquées ci-dessus et les miennes rapportées dans ce travail;

3° Ou bien calculer théoriquement ε .

Le premier essai de calcul de ε a été donné par Hagenbach en 1860, mais M. Couette a montré que ce calcul est inexact.

Dans sa thèse, M. Couette reprend ce calcul en partant du théorème des forces vives et trouve pour valeur du terme correctif exprimée en dynes par centimètre carré :

$$\frac{\mu}{\pi^2} \frac{D^2}{r^4}$$

Alors l'équation de Poiseuille pour le tube entier s'écrit :

$$D = \frac{\pi r^4 \left(g H \mu - \frac{\mu}{\pi^2} \frac{D^2}{r^4} \right)}{8 \eta l}$$

ou

$$D = \frac{\pi r^4 g \mu \left(H - \frac{D^2}{\pi^2 r^4 g} \right)}{8 \eta l}$$

Voici les résultats en appliquant cette formule à l'une des expériences de Poiseuille (2^e série).

$$1^{\circ} \text{ tube } r = 0^{\text{cm}}007 \quad l = 1^{\text{cm}}575.$$

Les valeurs de η obtenues pour différentes vitesses s'écartent peu de la moyenne 0,01329 (tandis que sans la correction elles croissent avec la vitesse), mais remarquons que 0,01329 est $> 0,01309$, nombre résultant des expériences de Poiseuille (1^{re} série).

2° Même tube réduit à $l = 0^{\text{cm}}677$. Pour des vitesses croissantes mais encore faibles, les valeurs de η obtenues par la formule précédente s'écartent peu de la moyenne 0,01364; mais pour les grandes vitesses dans ce même tube, on obtient $\eta = 0,01383$.

Les deux nombres 0,01329 et 0,01364 devraient être les mêmes et égaux à la valeur 0,01309 donnée par Poiseuille (1^{re} série).

Pour faire disparaître cet écart, M. Couette admet qu'il faut ajouter à la longueur l du tube une longueur fictive λ pour tenir compte du frottement qui se produit à l'entrée dans la courte région où les filets liquides ne sont pas encore parallèles à l'axe du tube. La valeur de λ est alors calculée par

$$0,01329 \frac{1,575}{1,575 + \lambda} = 0,01364 \frac{0,677}{0,677 + \lambda}$$

Ce qui donne pour λ une valeur presque égale à trois fois le diamètre du tube. Il en résulte pour η une valeur presque égale à celle donnée par Poiseuille.

Je dis que pour deux raisons le calcul de ce terme λ ne peut être accepté :

Première raison. — Il est certain que la valeur de λ ainsi obtenue fera disparaître l'écart entre les deux nombres 0,01329 et 0,01364, mais elle ne fera pas disparaître l'écart entre 0,01364 et 0,01383.

Deuxième raison. — Pour faire disparaître l'écart entre les deux nombres 0,01329 et 0,01364, il est certain qu'il suffit d'augmenter l d'une certaine longueur λ et cela parce que le nombre 0,01364 (qui se rapporte au tube le plus court, 0^{cm}677) est plus grand que le nombre 0,01329 qui se rapporte au tube le plus long des deux, 1^{cm}575. Mais je montrerai plus loin que parmi les expériences de Poiseuille, plusieurs donnent, avec le tube le plus court, un nombre inférieur à celui que donne le tube le plus long, il en résulterait pour λ une valeur négative. Donc les expériences de Poiseuille ni ne montrent la nécessité du terme λ , ni ne permettent de le calculer. Le calcul de λ , comme l'a indiqué M. Couette, est donc illusoire.

Je montrerai d'ailleurs que la correction totale indiquée par M. Couette est insuffisante dès que le diamètre devient un peu grand, et cela en utilisant les expériences mêmes de M. Couette

et les miennes. Ceci fera l'objet du deuxième chapitre de la deuxième partie de ce travail. Je dois, du reste, déjà citer à ce sujet l'observation de M. Brillouin, page 139 de ses leçons sur la viscosité : « Il semble que la correction indiquée par M. Couette est un peu faible pour les grandes vitesses. »

En ce qui concerne la détermination du coefficient de viscosité, la méthode de Poiseuille est bien la meilleure que l'on possède actuellement. Depuis Poiseuille, de nombreux expérimentateurs l'ont employée. Naturellement l'eau a été soumise à des mesures nombreuses et soignées et pourtant l'accord entre les divers résultats n'est qu'à peu près satisfaisant. Parmi les travaux les plus importants et les plus précis effectués sur divers liquides, il y a lieu de citer : 1° Pribram et Handl (1877-1880), mesure du coefficient de viscosité de nombreux liquides entre 0 et 80°; 2° le travail considérable de Thorpe et Rödger (*Philosophical transactions*, 1894) sur un grand nombre de liquides entre 0 et 120°; travaux effectués dans le but d'établir des relations entre la viscosité et la constitution chimique, mais qui n'ont rien donné de général.

Régime hydraulique. — Beaucoup de physiciens et d'hydrauliciens se sont occupés de l'étude du deuxième régime. Nombreuses sont les formules empiriques qui ont été proposées pour le représenter tant en France qu'à l'étranger. Les expériences les plus importantes sont dues à :

Bossut en France, vers 1750;
Hagen en Allemagne (1854);
de Prony, Darcy en France (1857);
Reynolds en Angleterre (1883);
Couette en France (1890), etc.

Les expériences d'Hagen ont porté sur des tubes à parois très lisses d'un diamètre compris entre 0^{cm}28 et 0^{cm}60 à différentes températures. Il conclut de ses expériences que la perte de charge absorbée par les frottements et par unité de longueur est représentée par

$$K \left(\frac{D}{\pi r^2} \right)^n$$

K étant une fonction du rayon;

$n = 1,75$ pour tous les tubes.

Darcy a étudié le régime hydraulique, surtout dans des tubes métalliques avec des vitesses allant jusqu'à 7 mètres par seconde et des diamètres allant jusqu'à 50 centimètres. En général, la perte de charge par centimètre est assez bien représentée par l'expression précédente, mais avec $n = 1,92$. Mais il faut observer que les tubes de Darcy présentaient des aspérités, des joints de place en place et même des variations de diamètre, ce qui, évidemment, donne naissance à des irrégularités dans le mouvement du liquide.

Les expériences de Reynolds ont porté sur des tubes de plomb à parois très lisses. J'indiquerai plus loin la disposition essentielle de son appareil. Il représente encore la perte de charge par centimètre

$$K \left(\frac{D}{\pi r^2} \right)^n \text{ avec } n = 1,722.$$

M. Couette a opéré sur des tubes de verre et sur des tubes de cuivre à paroi lisse. Le principe de sa méthode a été indiqué déjà. Il conclut de ses expériences que la perte de charge par centimètre est représentée

par

$$a D + b D^2$$

a et b constantes dépendant du rayon, type de formule déjà donnée par de Prony et Darcy.

Lorsqu'on examine ces formules (et toutes les autres), on est immédiatement frappé de ce fait : aucune d'elles ne tient compte de l'existence du premier régime et de la vitesse critique. Toutes admettent implicitement que le deuxième régime existe seul, puisqu'elles s'étendent jusqu'à la vitesse zéro, tandis que, en

réalité, le deuxième régime ne commence qu'à la vitesse critique.

J'ai, pour cette raison, repris l'étude expérimentale du deuxième régime dans le troisième chapitre de la deuxième partie de ce travail. On y verra qu'il est possible de représenter le régime hydraulique par une équation plus générale qu'aucune des précédentes, puisqu'elle s'applique à tous les tubes et à tous les liquides et que son type reste le même pour tous les appareils où le liquide est animé d'un mouvement uniforme.

Relations de l'écoulement dans les tubes avec le coefficient de frottement. — Poiseuille a établi nettement cette relation dans le cas des faibles vitesses et nous savons que l'introduction d'un terme correctif permet l'application de la formule de Poiseuille à une vitesse quelconque du premier régime.

La loi de Reynolds indique comment la vitesse critique se trouve reliée au coefficient de frottement.

Seul le régime hydraulique est, à ce point de vue, jusqu'ici resté isolé. Ayant constaté l'écart qu'il présente par rapport à la relation de Poiseuille, on s'est contenté d'ajouter : il est cependant probable que le coefficient de frottement reste le même, mais le phénomène change de nature : il se produit des tourbillons. Mais ce coefficient de frottement ne figure dans aucune des formules de ce régime. On verra que l'équation du deuxième régime que j'ai obtenue comble cette lacune.

II. — Méthode du cylindre tournant d'un mouvement uniforme.

Principe de cette méthode. — Rotation uniforme d'un cylindre en présence d'un autre cylindre fixe de même axe, de diamètre un peu différent, l'intervalle entre les deux cylindres étant rempli par le liquide. La torsion d'un fil, par exemple, maintient le cylindre intérieur fixe en équilibre et mesure le frottement.

Cette méthode a été indiquée par le docteur Margules (*Wiener Berichte*, tome LXXXIII, 2^e série). M. B. Elie (*Journal de Physique*, 2^e série, tome I) a fait tourner une sphère dans une sphère concentrique suspendue à un bifilaire. M. Couette (thèse, 1890) a employé l'appareil à cylindres et a nettement mis en évidence ce qui suit :

La théorie montre que le couple de torsion C est donné par

$$C = 4\pi \eta \omega h \frac{R_1^2 R_o^2}{R_1^2 - R_o^2}$$

R_1 R_o rayons des deux cylindres.

h hauteur du cylindre fixe.

ω vitesse de rotation du cylindre extérieur.

η coefficient de viscosité.

L'expérience montre :

1° Que le rapport $\frac{C}{\omega}$ reste parfaitement constant à mesure que la vitesse croît à partir de zéro. La formule donne alors de bonnes valeurs de η comme l'ont montré les expériences faites avec l'eau et avec l'air;

2° Qu'à partir d'une certaine vitesse, le rapport $\frac{C}{\omega}$ augmente d'abord rapidement avec la vitesse, puis plus lentement (à peu près comme la vitesse).

En d'autres termes, il y a encore ici deux régimes.

De même qu'il se reconnaissait au changement d'aspect de la veine liquide, le changement de régime se reconnaît facilement ici à l'aspect de la surface libre dans l'espace annulaire : pendant le premier régime, elle est calme et lisse; pendant le deuxième régime, elle est calme et ridée; pendant la courte période de transition entre les deux régimes, elle présente un aspect changeant brusquement d'un instant à l'autre.

La vitesse critique ω_c est

dans le cas de l'eau, 55 tours par minute

— l'air 760 —

avec le même appareil. Or si on forme l'expression $\frac{\mu \omega_c}{\eta}$ on trouve (μ masse spécifique du liquide)

$$\text{pour l'eau à } 17^\circ \frac{1 \times 55}{0,01096} = 5020.$$

$$\text{air à } 20^\circ \frac{0,0012 \times 760}{0,00018} = 5060.$$

La vitesse critique est donc reliée au coefficient de viscosité, à la masse spécifique (et sans doute aussi à la dimension transversale ici $R_1 - R_0$), par une relation tout à fait analogue à celle donnée par Reynolds dans le cas des tubes.

Donc ici encore nous avons :

Pour le premier régime une relation entre le coefficient η , la vitesse, μ masse spécifique et les dimensions de l'appareil.

Pour la vitesse critique une relation avec η , avec la masse spécifique et avec l'appareil.

Mais de même que dans le cas des tubes, il n'existe aucune formule pour représenter le deuxième régime et établir sa relation avec le coefficient η .

Des considérations analogues à celles qui m'ont guidées dans le cas des tubes m'ont conduit à représenter le deuxième régime de l'appareil à cylindre par une formule du même type que celle du deuxième régime des tubes.

Le premier régime de la méthode du cylindre se prête mal à la détermination de η , car il est difficile de régler et de conserver le centrage du cylindre intérieur. De plus, il faut une notable quantité de liquide.

III. — Méthode du disque oscillant ou méthode de Newton.

Les expériences que Coulomb a effectuées par cette méthode sont décrites dans : *Mémoires de l'Institut*, tome III, 1801.

L'appareil se compose de deux disques horizontaux réunis par une tige rigide suspendue à un fil de torsion. Le disque inférieur et quelques centimètres de la tige plongent dans le liquide. Le reste de l'appareil est dans l'air. Le limbe divisé du disque supérieur et un index fixe permettent de mesurer les amplitudes des oscillations tournantes qu'exécute l'appareil.

La diminution d'amplitude est due à différentes causes : frottement intérieur dans le fil ; communication du mouvement au support ; action de l'air sur le disque supérieur ; action de l'air et du liquide sur la tige ; action du liquide sur le disque inférieur. Pour évaluer séparément cette dernière cause, on fait une deuxième expérience en supprimant le disque inférieur et on combine les résultats de manière à éliminer les autres causes par le calcul. De l'action du liquide sur le disque, on déduit son coefficient de viscosité.

La théorie de cette méthode, développée déjà par plusieurs physiciens, a été reprise et généralisée par M. Couette (thèse, 1890). Le calcul ne peut se faire qu'en adoptant plusieurs approximations dont la première est une faible vitesse angulaire, afin de pouvoir négliger l'effet de la force centrifuge.

Le coefficient η est alors donné par la formule :

$$\eta = \frac{8 I^2 K_o^4}{\rho \pi^2 a^8} \left[\frac{\mu \sqrt{K - \mu}}{K^3} - \frac{\mu_o \sqrt{K_o - \mu_o}}{K_o^3} \right]^2$$

où l'on a

I moment d'inertie de l'appareil.

$$K = \frac{\pi}{T} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\pi^2}}$$

T = durée d'une oscillation.

δ le décrément logarithmique.

$$\mu = \frac{\delta}{T}$$

a le rayon du disque.

Les lettres affectées de l'indice zéro ont les mêmes significations dans le cas où le disque inférieur est supprimé.

O.-E. Meyer (*Journal de Crelle*, tome LIX, 1861), puis plus tard en 1865, à qui l'on doit de nombreux travaux sur ce sujet, a repris la méthode en la perfectionnant. Mais ce ne sont guère que des changements de détail sur lesquels jé crois inutile d'insister.

Maxwel (*Philosophical transactions*, 1866), puis Meyer (*Annales de Poggendorf*, 1871) y ont apporté une modification intéressante : le disque inférieur ne plonge plus dans un liquide pratiquement indéfini, mais à égale distance, au-dessus et au-dessous de lui sont installés deux disques fixes.

On peut encore rattacher à cette méthode les expériences de von Piotrowsky, qui fait osciller une sphère creuse successivement remplie de liquide et remplie d'air.

Cette méthode a toujours fourni pour le coefficient de frottement η de l'eau des nombres supérieurs à ceux de Poiseuille. Aussi les meilleurs résultats obtenus par Meyer pour l'eau à 15°5 sont :

$$0,01394 \quad 0,01322 \quad 0,01314$$

au lieu de 0,01114, d'après Poiseuille.

Coulomb et Meyer ont montré que la nature du disque n'influe pas sur les résultats.

Si la méthode donne des résultats trop forts, cela tient sans doute à ce que le problème théorique est très compliqué et qu'on n'est arrivé à le résoudre que d'une façon approchée. Ainsi on admet que le liquide se meut au-dessus et au-dessous du disque comme si le disque était indéfini et on néglige les frottements dus au fluide extérieur au cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe et tangentes au disque, sans compter d'ailleurs les défauts de planage et de centrage du disque.

D'autre part, cette méthode présente l'inconvénient d'être plus compliquée que celle de Poiseuille et d'exiger beaucoup plus de liquide.

En dehors de ces méthodes, je n'en connais aucune autre représentant une réelle importance. Je citerai seulement l'étude de la

vitesse limite atteinte par des grains de plomb qui tombent dans un liquide ou des bulles d'air qui s'y élèvent.

A ces méthodes, la première partie de ce travail vient ajouter une méthode nouvelle : mouvement oscillatoire d'une colonne liquide placée dans un tube en U.

Les deux mouvements les plus simples que l'on puisse donner facilement à un liquide sont le mouvement uniforme et le mouvement périodique.

Ces mouvements peuvent être obtenus :

Soit en entraînant le liquide par le mouvement d'une surface qui y est immergée ;

Soit en faisant circuler le liquide sous l'action d'une pression.

Dans le premier cas, le mouvement uniforme est obtenu dans l'appareil à cylindres de M. Couette, par exemple, et le mouvement périodique dans la méthode de Coulomb.

Dans le deuxième cas, le mouvement uniforme est obtenu en faisant circuler le liquide dans un tube sous l'action d'une pression constante produite par le liquide lui-même.

J'ai alors cherché à étudier le mouvement périodique que l'on obtient en écartant de sa position d'équilibre une colonne de liquide placée dans un tube en U, c'est-à-dire sous l'action d'une pression produite par le liquide lui-même. C'est l'analogue de la méthode du disque oscillant entre deux plans (modification de la méthode de Coulomb par Maxwel, puis par Meyer).

PREMIÈRE PARTIE

Étude des oscillations d'une colonne de liquide dans un tube en U

CHAPITRE I

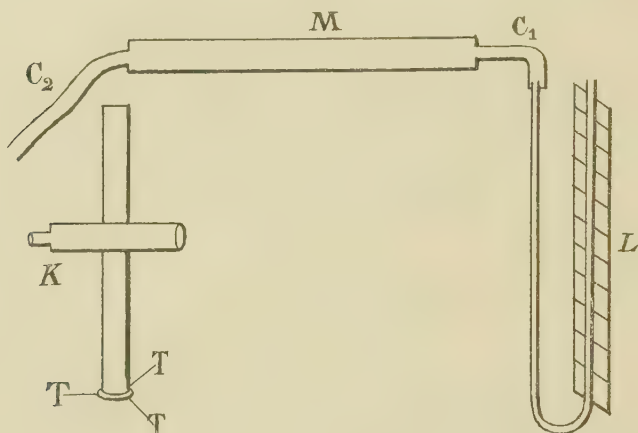
APPAREIL ET METHODE D'OBSERVATION

A ma connaissance, l'étude complète du mouvement d'une colonne de liquide dans un tube en U n'a pas été faite, surtout en ce qui concerne sa relation avec le coefficient de frottement du liquide.

C'est précisément l'étude de ce mouvement qui m'a conduit ensuite à trouver la loi générale du deuxième régime d'écoulement uniforme dans un tube et sa relation avec le coefficient de frottement.

I — Description de l'appareil. — C'est à peine un appareil. Il se compose simplement d'un tube en U d'environ 50 centimètres de hauteur disposé verticalement sur une lame de verre dépoli L. Sur cette lame, en face de l'une des branches du tube, sont tracées des divisions de 2 en 2 centimètres. L'autre branche du tube est reliée par un caoutchouc C₁ gros et court à un tube métallique M de 2 mètres de long et de 3 centimètres de diamètre environ. A l'autre extrémité, le tube M porte un caoutchouc C₂ gros et court par lequel on aspire ou on souffle pour écarter la colonne liquide de sa position d'équilibre. Avec un

tel diamètre du tube C_2MC_1 , le frottement de l'air à l'intérieur du tube pendant les oscillations est tout à fait négligeable vis-à-

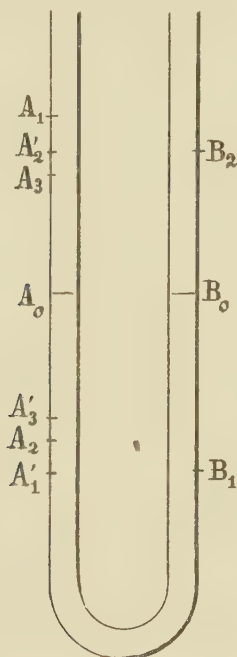


vis de celui du liquide. Un cathétomètre K permet la mesure de l'amplitude des oscillations.

II. — **Mesure de l'amplitude des oscillations.** — On écarte la colonne liquide de sa position d'équilibre $A_0 B_0$ d'une longueur connue $A_0 A_1 = a_1$ en aspirant par le tube M. On pince le caoutchouc C_2 , on attend quelques instants pour laisser rassembler le liquide et on laisse brusquement retomber la colonne liquide.

L'extrémité A_1 de cette colonne retombe jusqu'en un certain point A_2 dont on détermine la position au moyen de la lunette du cathétomètre munie d'un réticule horizontal. Pour cela, on place par tâtonnement la lunette de façon que le sommet du ménisque en arrivant en A_2 soit juste tangent au réticule. On y arrive assez rapidement et avec précision.

On commettrait une erreur notable en prenant $A_0 A_2$ comme valeur de la deuxième amplitude. Une certaine quantité de liquide reste, en effet, adhérente à la paroi le long de $A_1 A_2$; le point A_2 est donc certainement trop bas, ainsi que le point B_2 . Mais produisons le même écart primitif a_1 en sens inverse en $A_0 A'_1$, laissons retomber la colonne liquide, l'extrémité A'_1 re-



monte en A'_2 qui (pour la même raison que tout à l'heure en B_2) est trop bas. On peut donc prendre pour valeur a_2 de la deuxième amplitude :

$$2 a_2 = A_2 A'_2.$$

On a d'ailleurs pour la 1^{re} :

$$2 a_1 = A_1 A'_1.$$

La 3^{me} amplitude est observée de la même façon :

$$2 a_3 = A_3 A'_3 \quad (\text{etc.})$$

Mais le champ de la lunette n'est pas très étendu et si on observait toutes les amplitudes $a_1 a_2 a_3$ successivement, on ne pourrait pas employer de grandes amplitudes initiales a_1 .

Mais au lieu d'observer toutes les amplitudes successives, je me donne l'amplitude a_1 et j'observe l'amplitude suivante a_3 du même côté de la position d'équilibre. Je mesure donc $2a_1 2a_3$. II

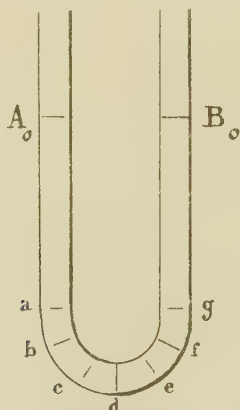
est possible alors d'employer des valeurs de a_1 allant jusqu'à 10 centimètres. Comme dans bien des cas, l'amplitude va rapidement en diminuant, au lieu d'observer a_1 a_3 a_5 a_7, il est préférable, après avoir observé a_1 et a_3 pour une première valeur donnée de a_1 , de recommencer avec une nouvelle valeur donnée de a_1 que l'on peut prendre assez voisine de la première.

On peut obtenir un plus grand nombre de valeurs du rapport $\frac{a_1}{a_3}$ qui définit l'amortissement.

On prend naturellement comme positions initiales A_1 A'_1 du sommet de la colonne les traits tracés sur la lame de verre dépoli. Ces traits sont sensiblement équidistants (2^{cm}) et la position d'équilibre A_0 se trouve en face de l'un d'eux.

III. — Le rayon moyen du tube est déterminé par pesée au mercure (voir à la fin une note à ce sujet).

La longueur de la colonne liquide est mesurée de la façon suivante : le long de la courbure on a tracé quelques petits traits fins et courts : a b c d e f g ; on mesure préalablement les distances ab , bc , cd , etc. au cathétomètre. Lorsque le liquide est placé dans le tube, on mesure de même A_0a et B_0g ; la somme de toutes ces longueurs donne la longueur de la colonne.



Pour obtenir la masse spécifique μ de chaque liquide à la température de l'expérience, j'ai suivi l'exemple de Thorpe et Rod-

ger (*Mémoire sur la mesure de η par la méthode de Poiseuille*); j'ai employé la densité à 0° et la formule de dilatation données par les meilleurs expérimentateurs.

Toutes mes expériences ont été faites à la température ambiante donnée par un thermomètre au 1/10 placé dans un tube rempli du liquide étudié et suspendu au contact du tube en U.

CHAPITRE II

ETUDE DU PREMIER REGIME D'OSCILLATION

Nous verrons, en effet, plus loin que selon la valeur de l'amortissement $\frac{a_1}{a_3}$, le mouvement oscillatoire peut se faire suivant deux régimes.

Je relève dans ce chapitre uniquement les résultats relatifs au premier régime.

Alcool isoamylique (inactif) pur (5 mai 1910)
(exempt de pyridin, Poulenc).

$\mu_0 = 0,8254$; dilatation $V = 1 + 0,0009241 t + 0,0000002643 t^2$.

Rayon moyen du tube: $r = 0,3368$

Longueur de la colonne: $l = 66^{\text{cm}}_3$ $t = 12^{\circ}5$.

1° $2 a_1 = 19,318 - 7,336 = 11^{\text{cm}} 982$.

Observations de $2 a_3$, lectures faites :

en bas.....	12,782	$\left. \begin{array}{l} > 0,604 \\ > 0,598 \\ > 0,600 \\ > 0,604 \end{array} \right\} \text{moyenne: } 2 a_3 = 0,602,$
en haut.....	13,386	
en bas.....	12,788	
en haut.....	13,388	
en bas.....	12,784	

d'où

$$A = \frac{a_1}{a_3} = \frac{11,982}{0,602} = 19,90.$$

$$2^{\circ} \quad 2 a_1 = 21,320 - 5,342 = 15^{\text{cm}} 978.$$

Mesure de $2 a_3$:

$$\begin{array}{rcl} 13,360 & > & 0,796 \\ 12,564 & > & 0,802 \\ 13,366 & > & 0,806 \\ 12,560 & > & 0,806 \end{array} \quad \text{moyenne : } 2 a_3 = 0,801,$$

d'où

$$A = \frac{a_1}{a_3} = \frac{15,978}{0,801} = 19,95.$$

$$3^{\circ} \quad 2 a_1 = 17,294 - 9,308 = 7^{\text{cm}} 986.$$

Mesure de $2 a_3$:

$$\begin{array}{rcl} 12,988 & > & 0,400 \\ 13,388 & > & 0,406 \\ 12,982 & > & 0,402 \\ 13,384 & > & 0,402 \end{array} \quad \text{moyenne : } 2 a_3 = 0,403,$$

d'où

$$A = \frac{a_1}{a_3} = \frac{7,986}{0,403} = 19,86.$$

Résultats de cette expérience

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$	$\frac{a_1}{a_3}$ est constant.
7,986	0,4031	19,86	
11,982	0,602	19,90	moyenne :
15,978	0,801	19,95	$A = \frac{a_1}{a_3} = 19,91.$

2^{me} expérience. — *Alcool isoamylique*, le même (5 mai 1910).

Même tube : $r = 0,3368$ $l = 53^{\text{cm}} 8$ $t = 12^{\circ}5$.

$$1^{\circ} \quad 2 a_1 = 16,300 - 0,302 = 15,988.$$

Mesure de $2 a_3$:

$$\begin{array}{rcl}
 7,766 & & \\
 6,628 & > 1,138 \\
 7,760 & > 1,132 \\
 6,622 & > 1,138 \\
 7,756 & > 1,134 \\
 6,630 & > 1,126
 \end{array}
 \quad \text{moyenne : } 2 a_3 = 1,130,$$

d'où

$$A = \frac{a_1}{a_3} = 14,15.$$

$$2^\circ \quad 2 a_1 = 13,298 - 1,366 = 11,932.$$

Mesure de $2 a_3$:

$$\begin{array}{rcl}
 6,894 & & \\
 7,738 & > 0,844 \\
 6,898 & > 0,840 \\
 7,734 & > 0,836 \\
 6,890 & > 0,844 \\
 7,730 & > 0,840
 \end{array}
 \quad \text{moyenne : } 2 a_3 = 0,841.$$

$$A = \frac{a_1}{a_3} = 14,20.$$

Alcool isoamylque inactif (décembre 1909), échantillon depuis longtemps au laboratoire.

$$\text{Rayon du tube} \quad r = 0,3339.$$

$$1^\circ \quad l = 71 \text{ cm } 2 \quad t = 19^{\text{e}}5.$$

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
15,903	1,439	11,05
11,946	1,080	11,06
7,956	0,717	11,09
3,944	0,354	11,11

2° Mème tube $l = 52^{\text{cm}} 1$ $t = 19^{\circ} 8$.

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
15,994	2,270	7,05
12,004	1,684	7,12
8	1,124	7,12
4,002	0,563	7,10

3° Mème tube $l = 40,05$ $t = 19^{\circ} 4$.

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
15,994	2,811	5,70
12,004	2,090	5,74
8	1,42	5,63
4,002	0,699	5,72

4° Mème liquide tube $r = 0,2222$ $l = 38^{\text{cm}}$ $t = 19^{\circ} 6$.

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
16	0,225	71
8	0,118	68

Chloroforme pur (Poulenc) (1^{er} mai 1910).

Tube $r = 0,09678$ $l = 72^{\text{cm}} 6$ $t = 13^{\circ} 6$.

$$2 a_1 = 20,798 \rightarrow 8,792 = 12,006.$$

Mesure de $2 a_3$:

13,962	> 1,334	
15,296	> 1,352	
13,944	> 1,340	
15,284	> 1,348	moyenne $2 a_3 = 1,343$,
13,936	> 1,340	
15,276	> 1,340	

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 8,94.$$

Chloroforme (autre échantillon du laboratoire) (janvier 1910).

Tube $r = 0,09678$ $l = 61^{\text{cm}} 1$ $t = 14^{\circ}$.

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
3,986	0,555	7,19
7,956	1,100	7,23
11,968	1,64	7,23

Acétone ($\text{CH}_3\text{-CO-CH}_3$) (pure, Poulenc) (mai 1910).

$r = 0,09678$ $l = 68,6$ $t = 14^{\circ} 4$.

$2 a_1 = 12,007$.

Mesure de $2 a_3$:

13,292	moyenne $2 a_3 = 1,229$.
12,060 > 1,232	
13,278 > 1,218	
12,040 > 1,233	
13,266 > 1,226	
12,034 > 1,232	

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 9,77.$$

Oxyde d'éthyle (échantillon ordinaire du laboratoire).

$r = 0,09678$ $l = 71$ $t = 13^{\circ} 3$.

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
3,970	0,54	7,30
7,934	1,091	7,27
11,891	1,620	7,35

Eau distillée (février 1910).

$$r = 0,1520 \quad l = 73,5.$$

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
16	1,356	11,8 à 16°2.
7,934	0,625	12,6 à 15°3.

$$r = 0,1520 \quad l = 49,5 \quad t = 14°.$$

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
16	1,74	9,22
8	0,876	9,12

Benzine.

$$r = 0,09678 \quad l = 53^{\text{cm}} 41 \quad t = 19°5.$$

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
7,998	0,200	39,98
11,950	0,302	39,60
15,970	0,403	39,61

Alcool isobutylique (pur).

$$r = 0,3339 \quad l = 63,72 \quad t = 18°8.$$

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
7,956	1,018	7,80
11,946	1,524	7,84
15,903	2,035	7,81
19,935	2,528	7,89

Nitrobenzine (pure, Poulenc).

$$r = 0,2222 \quad l = 66^{\text{cm}} 71.$$

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
7,956	1,410	5,64
11,946	2,090	5,71
15,903	2,821	5,63
11,946	2,02	5,90
19,935	3,340	5,97

$\left. \begin{array}{l} 5,64 \\ 5,71 \\ 5,63 \end{array} \right\} \text{ à } 17^{\circ}2.$
 $\left. \begin{array}{l} 5,90 \\ 5,97 \end{array} \right\} \text{ à } 16^{\circ}6.$

Nitrotoluène (ortho) (pur, Poulenc).

$$r = 0,2222 \quad l = 71^{\text{cm}} 1 \quad t = 12^{\circ}.$$

23,310	16,514	$> 1,116$
11,328	17,630	
	16,516	$> 1,114$
$11,982 = 2 a_1$		$1,115 = 2 a_3$

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 10,75.$$

23,804	17,700
7,834	16,204
$15,970 = 2 a_1$	$1,496 = 2 a_3$

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 10,67.$$

Sur cette feuille se trouvent quelques expériences faites pendant la rédaction de ces notes :

Bromure d'éthylène, $\text{C}^2\text{H}^4\text{Br}^2$.

Tube $r = 0,09678 \quad l = 39^{\text{cm}} 7 \quad t = 14^{\circ}.$

$$14,356 - 2,380 = 11,976 = 2 a_1.$$

Mesure de $2 a_3$:

8,419

8,700

8,402

8,702

différence moyenne :

$$0,286 = 2 a_3$$

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 41,9.$$

Alcool isoamylique (pur).

Tube $r = 0,2597$ $l = 37^{\text{cm}} 02$ $t = 14^{\circ}8$.

1°

$$2 a_1 = 11,976.$$

Mesure de $2 a_3$:

5,592

5,228 > 0,364

5,590 > 0,362

5,234 > 0,356

5,588 > 0,354

5,230 > 0,358

moyenne : $2 a_3 = 0,359$,

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 33,5.$$

2° Même tube, même longueur, même température.

$$2 a_1 = 15,987.$$

Mesure de $2 a_3$:

7,236

6,745 > 0,491

7,230 > 0,485

6,747 > 0,483

moyenne : $2 a_3 = 0,487$,

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 32,8.$$

Alcool isoamylique (pur).

$$r = 0,2597 \quad l = 26,01 \quad t = 14^{\circ}5.$$

$$2 a_1 = 11,948.$$

Mesure de $2 a_3$:

$$\begin{array}{rcl} 6,218 & > 0,688 \\ 5,530 & > 0,684 \\ 6,214 & > 0,664 \\ 5,550 & > 0,664 \\ 6,214 & > 0,664 \\ 5,542 & > 0,672 \end{array} \quad \text{moyenne : } 2 a_3 = 0,674,$$

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 17,74.$$

Bromure d'éthylène (pur) (7 mai 1910),

$$\text{Tube } r = 0,1520 \quad l = 65^{\text{cm}} 2 \quad t = 11^{\circ} 5.$$

$$2 a_1 = 11^{\text{cm}} 984.$$

Mesure de $2 a_3$:

$$\begin{array}{rcl} 12,115 \\ 13,820 \\ 12,108 \\ 13,822 \\ 12,106 \end{array} \quad \text{différence moyenne : } 2 a_3 = 1,713.$$

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 7.$$

Bromoforme CHBr_3 (pur, Poulenc) (7 mai 1910).

$$\text{Tube } r = 0,1520 \quad l = 70^{\text{cm}} 4 \quad t = 12^{\circ}5.$$

1°

$$2 a_1 = 11,984.$$

Mesure de $2 a_3$:

13,648

15,646

13,651

15,649

différence moyenne : $2 a_3 = 2$.

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 6.$$

2°

$$2 a_1 = 15,960.$$

$$15,852 - 13,248 = 2 a_3 = 2,604,$$

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 6,12$$

Ces expériences, faites avec des colonnes liquides de longueurs et de rayons différents, avec des liquides de densités et de viscosités très variables, montrent nettement le résultat suivant :

Loi de l'amortissement dans le premier régime d'oscillation.

— Pour une colonne de liquide donnée, le rapport $\frac{a_1}{a_3}$ est indépendant de l'amplitude, c'est-à-dire les amplitudes décroissent en progression géométrique.

(Résultat sans doute déjà connu, mais dont les données numériques sont nécessaires pour pouvoir : 1° établir la relation avec le coefficient de frottement; 2° différencier les deux régimes d'oscillation.)

II. — Représentation algébrique du premier régime d'oscillation. — Coefficient de frottement. — Si aucune force ne s'opposait au mouvement de la colonne liquide, l'amplitude serait constante et en appelant :

m la masse de la colonne liquide, $m = \pi r^2 l \rho$.

a l'élongation à l'époque t ,

c la force nécessaire pour écarter la colonne liquide de 1 cen-

timètre de sa position d'équilibre (c'est donc le poids d'une colonne liquide de 2 centimètres de hauteur), on a donc

$$C = 2\pi r^2 \rho g$$

l'équation de ce mouvement pendulaire serait

$$m \frac{d^2 a}{dt^2} + c a = 0.$$

et la période aurait pour valeur :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$$

Mais puisque les amplitudes décroissent en progression géométrique, c'est qu'une force constamment proportionnelle à la vitesse $\frac{da}{dt}$ s'oppose au mouvement. Cette force, évidemment due au frottement, est d'ailleurs proportionnelle à la longueur de la colonne liquide. Si donc on appelle f_1 une constante caractéristique du frottement par unité de longueur dans un tube de rayon donné, l'équation du mouvement s'écrit

$$(1) \quad m \frac{d^2 a}{dt^2} + f_1 l \frac{da}{dt} + c a = 0.$$

Or on sait que selon la valeur du coefficient constant $f_1 l$ qui mesure le frottement total, l'intégrale de cette équation représente un mouvement sinusoïdal amorti ou un mouvement apériodique.

Le mouvement est sinusoïdal amorti lorsque la condition

$$4 c m - f_1^2 l^2 > 0$$

est satisfaite et l'intégrale qui le représente est

$$(2) \quad a = a_0 e^{-\lambda t} \sin \omega t.$$

En identifiant les équations (1) et (2) et posant

$$\omega = \frac{\pi}{T'}$$

T^v période du mouvement amorti, on a les conditions suivantes :

$$(3) \quad T^v = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c - \frac{f_1^2 l^2}{4m}}} \quad \lambda = \frac{f_1 l}{2m}$$

Soient a_1 a_3 deux amplitudes consécutives d'un même côté de la position d'équilibre, l'extrémité de la colonne y arrive aux époques

$$t \quad \text{et} \quad t + T^v$$

on a donc

$$a_1 = a_0 e^{-\lambda t} \sin \frac{2\pi t}{T^v}$$

$$a_3 = a_0 e^{-\lambda(t + T^v)} \sin \frac{2\pi(t + T^v)}{T^v}$$

et par suite

$$(4) \quad \frac{a_1}{a_3} = e^{\lambda T^v}$$

Les amplitudes varient donc bien en progression géométrique (pour abréger l'écriture je pose $\frac{a_1}{a_3} = A$).

On a donc

$$\lambda T^v = \frac{\log A}{\log e}$$

ou en remplaçant λ par sa valeur $\frac{f_1 l}{2m}$

$$f_1 l = \frac{2m \log A}{T^v \log e}$$

ou bien

$$(5) \quad f_1 = \frac{2\pi r^2 \mu \log A}{T^v \log e}$$

Si on connaît μ masse spécifique du liquide,

r rayon du tube (par pesée au mercure),

$A = \frac{a_1}{a_3}$ déterminé comme ci-dessus,

T' qui se calcule facilement, en effet, en éliminant f_1 entre les équations (3) et (5) ci-dessus on a

$$(6) \quad T' = T \sqrt{1 + \frac{\log^2 A}{4 \pi^2 \log^2 e}} = T \sqrt{1 + \frac{\log^2 A}{7,45}}$$

et T est d'autre part donné par $T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$

Si donc, dis-je, μ , r , A , l ont été déterminés par l'expérience, l'équation (5) permet de calculer f_1 .

Le tableau suivant contient les valeurs de f_1 calculées au moyen des expériences précédentes :

<i>Alcool isoamylique.</i>				$\mu_{12,5} = 0,815$	$\mu_{19,5} = 0,811.$		
$r = 0,3368$	$l = 66,3$	$f_1 = 1,356$	$t = 12^{\circ}5$	$\frac{f_1}{8\pi} = 0,0540$	$\eta = 0,0550$	à $12^{\circ}5$	Thorpe et Rodger.
	53,8	1,359	12,5	0,0541			
0,3339	71,2	1,078	19,5	0,0429	0,0438	à $19^{\circ}5$	id.
	52,1	1,040	19,8	0,0415			
	40,05	1,065	19,4	0,0424			
0,2222	38	1,040	19,6	0,0415			
0,2597	37,02	1,2585	14,8	0,0501	0,0512	à $14^{\circ}7$	id.
	26,01	1,2635	14,6	0,0503			

<i>Bromure d'éthylène.</i>				$\mu_{11,5} = 2,188$	$\mu_{14} = 2,184.$		
$r = 0,1520$	$l = 65,2$	$f_1 = 0,5098$	$t = 11^{\circ}5$	$\frac{f_1}{8\pi} = 0,0203$	$\eta = 0,0199$	à $11^{\circ}5$	id.
0,09678	39,7	0,4582	14°	0,0185	0,0188	à 14°	id.

<i>Chloroforme.</i>				$\mu_{14} = 1,499.$			
$r = 0,09678$	$l = 72,6$	$f_1 = 0,1517$	$t = 13^{\circ}6$	$\frac{f_1}{8\pi} = 0,00604$	$\eta = 0,00601$	à $13^{\circ}6$	id.
	61,1	0,1497	14°	0,00596	0,00599	à 14°	id.

Acétone. $\mu_{14} = 0,803.$

$$r = 0,09678 \quad l = 68,6 \quad f_1 = 0,08616 \quad t = 14^{\circ}2 \quad \frac{f_1}{8\pi} = 0,00343 \quad \eta = 0,00343$$

à 14°2 Thorpe et Rodger.

Oxyde d'éthyle. $\mu_{13} = 0,720.$

$$r = 0,09678 \quad l = 71 \quad f_1 = 0,06630 \quad t = 13^{\circ}3 \quad \frac{f_1}{8\pi} = 0,00263$$

$\eta = 0,00253$ (Thorpe) ; $0,00270$ (Wykander).

Eau distillée.

$$r = 0,1520 \quad l = 73,5 \quad f_1 = 0,2864 \quad t = 15^{\circ}3 \quad \frac{f_1}{8\pi} = 0,0114 \quad \eta = 0,0114$$

$$0,3014 \quad 14^{\circ} \quad 0,0120 \quad 0,0118$$

Benzine. $\mu_{19,5} = 0,879.$

$$r = 0,09678 \quad l = 53,41 \quad f_1 = 0,1625 \quad t = 19,5 \quad \frac{f_1}{8\pi} = 0,00647 \quad \eta = 0,00650 \quad \text{Thorpe.}$$

Alcool isobutylique.

$$r = 0,3339 \quad l = 63,72 \quad f_1 = 0,9872 \quad t = 18,8 \quad \frac{f_1}{8\pi} = 0,0393 \quad \eta = 0,0402 \quad \text{id.}$$

Nitrobenzine. $\mu_{17} = 1,181.$

$$r = 0,2222 \quad l = 66,71 \quad f_1 = 0,5400 \quad t = 17^{\circ}2 \quad \frac{f_1}{8\pi} = 0,0215 \quad \eta = 0,0213 \quad \text{Pribram.}$$

Nitrotoluène (ortho). $\mu_{12} = 1,170.$

$$r = 0,2222 \quad l = 71,1 \quad f_1 = 0,6782 \quad t = 12^{\circ} \quad \frac{f_1}{8\pi} = 0,0274 \quad \eta = 0,0267 \quad \text{id.}$$

Ces résultats montrent assez nettement que :

Pour un liquide donné à une température donnée, le coefficient f_1 est indépendant de l et de r . C'est donc une constante caractéristique du liquide au point de vue frottement; f_1 représente donc un coefficient de frottement interne qui se présente ici comme indépendant de toute hypothèse sur la façon dont les molécules glissent les unes sur les autres.

Je n'ai pas jugé utile de multiplier davantage les expériences à température constante pour différents rayons et différentes longueurs, car je me suis aperçu de suite que ce coefficient de frottement f_1 était en relation simple avec le coefficient η que l'on détermine par la méthode de Poiseuille.

Signification physique du coefficient de frottement f_1 . — La force totale absorbée par le frottement possède à chaque instant la valeur

$$f_1 l \frac{da}{dt}$$

et par unité de longueur

$$f_1 \frac{da}{dt}$$

En d'autres termes, c'est cette force qui à l'instant considérée produit la déformation sur l'unité de longueur et $\frac{da}{dt}$ caractérise la grandeur de la déformation produite dans l'unité de temps.

On peut dire que

$$f_1 = \frac{\text{force produisant la déformation par unité de longueur}}{\text{grandeur de la déformation produite dans unité de temps.}}$$

III. — **Relation entre le coefficient de frottement précédent f_1 et le coefficient de frottement η que l'on détermine par l'équation et la méthode de Poiseuille.** — Le coefficient η que l'on détermine en appliquant la méthode de Poiseuille, se calcule comme il a été dit au début, par la formule

$$\eta = \frac{\pi r^4 H_o \mu g}{8 l D}$$

H_0 étant la pression exprimée en colonne du liquide étudié (correction faite de la perte de charge à l'entrée), c'est donc la charge absorbée uniquement par les frottements :

r rayon du tube;

μ masse spécifique du liquide, $g = 981$;

l longueur du tube;

D débit en centimètres cubes par seconde.

Si V est la vitesse moyenne du liquide, on a $\pi r^2 V = D$ et l'équation précédente peut s'écrire :

$$(7) \quad \frac{\pi r^2 H_0 \mu g}{l V} = 8 \pi \eta.$$

Or $\pi r^2 H_0 \mu g$, c'est la force constante qui fait circuler le liquide dans le tube, c'est la force absorbée par les frottements.

$\frac{\pi r^2 H_0 \mu g}{l}$ c'est la force absorbée par unité de longueur pour produire la déformation et cette déformation est caractérisée par la vitesse V . Le premier membre de l'équation (7) est donc l'analogue du coefficient f_1 .

On doit donc avoir

$$(8) \quad f_1 = 8 \pi \eta.$$

Dans le tableau de la page précédente, l'avant-dernière colonne contient le rapport $\frac{f_1}{8\pi}$ déduit de mes expériences.

La dernière colonne contient pour les mêmes corps, aux mêmes températures, les valeurs du coefficient η obtenues par divers physiciens au moyen de la méthode des tubes capillaires. La plupart de ces valeurs ont été empruntées aux mesures précises de Thorpe et Rödger. Quelques nombres de Vykander et de Pribram et Handl ont été pris dans les tables de Landolt.

La comparaison des nombres contenus dans les deux dernières colonnes montre que les valeurs de $\frac{f_1}{8\pi}$ sont en général d'accord avec les valeurs de η obtenues par la méthode de Poi-

seuille. D'ailleurs les valeurs de η obtenues par divers expérimentateurs présentent souvent entre elles des différences plus grandes.

L'alcool isoamylique que j'ai employé donne une valeur de η un peu inférieure à celle de Thorpe et Rödger, mais je ferai remarquer que les deux échantillons purs qu'ils ont étudié présentent entre eux le même écart. L'oxyde d'éthyle que j'ai employé (acheté à Grenoble) n'est certes pas chimiquement pur.

Les corps qui m'ont été livrés comme bien purs par la maison Poulenc sont : l'alcool isoamylique, $\text{C}^2\text{H}^4\text{Br}^2$, CHCl^3 , $\text{CH}^3\text{-CO-CH}^3$, alcool isobutylique, nitrobenzine, nitrotoluène (ortho).

IV. — **Lois du premier régime d'oscillation.** — Il est donc établi que $f_1 = 8\eta\pi$.

On a d'ailleurs, comme on l'a vu plus haut équation (5) :

$$(9) \quad f_1 = \frac{2\pi r^2 \mu \log A}{T' \log e}$$

et par suite

$$(10) \quad \eta = \frac{\mu r^2 \log A}{4 T' \log e}$$

ce que l'on peut écrire

$$(11) \quad \log A = 4 \log e \frac{\eta}{\mu} \frac{T'}{r^2}$$

D'où les lois suivantes :

Pour un liquide donné, le logarithme de l'amortissement est proportionnel :

1° A la période (loi des périodes);

2° A l'inverse du carré du diamètre (loi des diamètres).

Nous reviendrons plus loin sur l'application de cette méthode à la mesure du coefficient de frottement lorsque nous aurons précisé dans quelles conditions il faut se placer pour l'appliquer.

CHAPITRE III

**RECHERCHE EXPERIMENTALE DU DEBUT
DE L'APERIODICITE**

Le mouvement commence à être apériodique lorsque (voir page 30) la longueur de la colonne liquide prend la valeur L définie par

$$(12) \quad f_1^2 L^2 = 4 m c$$

c'est-à-dire

$$f_1^2 L^2 = 4 \pi r^2 \mu L. \quad 2 \pi r^2 \mu g.$$

La longueur apériodique minimum est donc donnée par

$$(13) \quad L = 8 \pi^2 g \frac{\mu^2 r^4}{f_1^2}$$

ou bien encore

$$(14) \quad L = \frac{g}{8} \frac{\mu^2 r^4}{\gamma^2}$$

Donc :

Lois de l'apériodicité. — La longueur apériodique minimum est proportionnelle :

- 1° *A la quatrième puissance du rayon;*
- 2° *Au carré de la masse spécifique du liquide;*
- 3° *A l'inverse du carré du coefficient de frottement.*

J'ai cherché à vérifier expérimentalement cette relation.

On écarte la colonne liquide de sa position d'équilibre de 8 à 10 centimètres et par tâtonnement on place le réticule de la lunette de façon que le sommet du ménisque arrive en retombant à être juste tangent au réticule. Il est alors facile de voir si oui

ou non il retourne. Si c'est non, on diminue alors progressivement la longueur de la colonne liquide jusqu'à ce qu'on puisse observer un léger retour.

On a alors la longueur cherchée L par défaut.

Voici quelques résultats ainsi obtenus :

Eau distillée.

Rayon du tube $r = 0,0643$ $t = 20^{\circ}3$.

$l = 30^{\text{cm}}$ le mouvement est nettement apériodique.

25 le mouvement est nettement apériodique.

22 le mouvement est encore apériodique, mais on devine que l'on approche de la limite, car le ménisque arrive plus brusquement sur sa position extrême.

19,7 le même fait s'observe et on se demande même s'il n'y a pas un léger retour.

18 on aperçoit nettement le retour du ménisque en arrière ; le mouvement n'est plus apériodique.

Or, si on calcule L par la formule précédente (14) en y faisant $\mu = 1$ $r = 0,0643$ $\eta = 0,0100$ à 20° , on obtient $L = 20^{\text{cm}} 5$.

On peut dire que la formule est vérifiée.

Benzine.

$r = 0,0643$ $t = 21^{\circ}5$.

$l = 50^{\text{cm}} 2$ apériodique.

46 apériodique.

42 { comme dans l'expérience précédente, à la façon
40 { brusque dont le ménisque aborde sa position ex-
trême, on devine le voisinage de la longueur limite.

39 un léger retour est visible.

La formule (14) avec $\mu = 0,873$ }
 $\eta = 0,00630$ } à $21^{\circ}5$

donne $L = 40^{\text{cm}} 5$.

Bromure d'éthylène.

Tube $r = 0,0643$ $t = 20^\circ$.

$l = 50^{\text{cm}}$ apériodique.

43 apériodique.

36 } comme précédemment on devine le voisinage immé-
32 } diat de la longueur limite.

30 on observe un léger retour.

La formule (14) avec $\mu = 2,18$ }
 $\eta = 0,0170$ } à 20°

donne $L = 34^{\text{cm}} 5$.

Alcool isoamylique (inactif).

Tube $r = 0,152$ $t = 18^\circ$.

$l = 61^{\text{cm}}$ apériodique.

46 id.

37 id.

28 id.

25 } comme précédemment on devine qu'on est dans le
23 } voisinage immédiat de la longueur limite L .

17,7 il y a un retour très net du ménisque.

L'application de la formule (14) avec $\mu = 0,820$ }
 $\eta = 0,0430$ } à 18°

donne $L = 23^{\text{cm}}$.

Ces expériences vérifient donc la loi d'apériodicité

$$L = 8 \pi^2 g \frac{\mu^2 r^4}{f_1^2} = \frac{g}{8} \frac{\mu^2 r^4}{\eta^2}$$

Et cette relation fournit en principe une nouvelle méthode pour la mesure du coefficient de frottement f_1 ou η .

Je me propose de chercher plus tard s'il est possible de diriger l'observation de façon à obtenir par cette méthode une mesure précise de η .

Tout ce qui précède nous montre déjà l'existence de deux régimes dans le mouvement de la colonne liquide.

Régime apériodique pour $l \geq L$

Premier régime d'oscillation pour $l \leq L$.

Mais nous allons voir que si on diminue la longueur de la colonne liquide dans un tube donné, on rencontre un troisième régime qui est un deuxième régime d'oscillation. Remarquons déjà que dans tout ce qui précède, il n'a pas été utilisé de valeurs de l'amortissement inférieures à cinq.

CHAPITRE IV

ETUDE DU DEUXIEME REGIME D'OSCILLATION

I. — **Résultats expérimentaux.** — Les résultats rapportés dans l'étude du premier régime montrent que si, dans un tube donné, on diminue progressivement la longueur, l'amortissement $\frac{a_1}{a_3}$ diminue en même temps. Cependant ces expériences

ne renferment pas de valeurs de $\frac{a_1}{a_3}$ inférieures à cinq. C'est que, comme nous allons le voir, pour les amortissements faibles, le phénomène change de nature.

Voici d'abord les détails complets d'un groupe d'expériences effectuées sur du chloroforme pur.

Chloroforme.

Le tube employé, déjà cité précédemment, a été jaugé au mercure à propos des expériences actuelles. On a trouvé :

Longueur de la colonne de mercure.....	71 ^{cm} 904,
Masse de mercure à 17°5.....	347 ^{gr} 400,

On en déduit : $r = 0,3368$.

Le tube contenant une colonne de chloroforme, $l = 62^{\text{cm}} 3$,
on a trouvé pour la mesure des amplitudes :

1^{re} mesure : $2 a_1 = 7,991$ $t = 15^{\circ}5$ 23 avril, 11 heures.

Mesure de $2 a_3$ à $15^{\circ}5$:

8,055
13,382 > 5,327
8,058 > 5,324
13,382 > 5,324
8,046 > 5,336
13,380 > 5,334
8,054 > 5,326
13,379 > 5,325
8,055 > 5,324

moyenne : $2 a_3 = 5^{\text{cm}} 328$,

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,4999.$$

23 avril, 2 heures.

Mesure de $2 a_3$ à $15^{\circ}6$:

7,928
13,246 > 5,318
7,922 > 5,324
13,253 > 5,331
7,926 > 5,327

moyenne : $2 a_3 = 5,325$,

d'où

$$\frac{a}{a_3} = 1,5006.$$

2^e mesure : même colonne $2 a_1 = 11^{\text{cm}} 993$.

Mesure de $2 a_3$ à $15^{\circ}2$:

23 avril, 8 heures.

3,524
11,416 > 7,892
3,521 > 7,895
11,410 > 7,889
3,527 > 7,883

moyenne : $2 a_3 = 7,890$,

Mesure de $2 a_3$ à $15^{\circ}4$:

23 avril, 9 heures.

3,514	>	7,889	
11,403	>	7,887	
3,516	>	7,890	moyenne : $2 a_3 = 7,888,$
11,406	>	7,897	
3,509	>		

Mesure de $2 a_3$ à $15^{\circ}4$ (après avoir déplacé un peu la lunette
autour de son axe) :

23 avril, 10 heures.

5,334	>	7,884	
13,218	>	7,877	
5,341	>	7,885	moyenne : $2 a_3 = 7,884,$
13,226	>	7,886	
5,340	>		

Mesure de $2 a_3$ à $15^{\circ}6$ (même remarque) : 23 avril, 11 h. 1/2.

14,563	>	7,877	
6,686	>	7,882	
14,568	>	7,886	moyenne : $2 a_3 = 7,886,$
6,682	>	7,892	
14,574	>	7,894	
6,680	>		

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{11,993}{7,887} = 1,5206.$$

3^e mesure même colonne $2 a_1 = 15,992.$

 Mesure de $2 a_3$ à $15^{\circ}7$:

23 avril, 10 h. 1/2.

5,362	>	10,326	
15,688	>	10,310	
5,378	>	10,310	
15,688	>	10,318	moyenne : $2 a_3 = 10,314,$
5,370	>	10,306	
15,676	>	10,314	
5,362	>		

Mesure de $2 a_3$ à $15^{\circ}6$:

23 avril, 3 heures.

$$\begin{array}{rcl}
 5,290 & > & 10,322 \\
 15,612 & > & 10,323 \\
 5,289 & > & 10,309 \\
 15,598 & > & 10,316 \\
 5,282 & > &
 \end{array}$$

moyenne : $2 a_3 = 10,318$,

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{15,992}{10,318} = 1,5502.$$

4^e mesure même colonne $2 a_1 = 19,942$.Mesure de $2 a_3$ à $15^{\circ}7$:

23 avril, 5 heures.

$$\begin{array}{rcl}
 19,048 & > & 12,579 \\
 6,469 & > & 12,583 \\
 19,052 & > & 12,587 \\
 6,465 & > & 12,579 \\
 19,044 & > & 12,584 \\
 6,460 & > & 12,580 \\
 19,040 & > & 12,572 \\
 6,468 & > &
 \end{array}$$

moyenne : $2 a_3 = 12,580$,

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,5851.$$

Le tableau de cette série est donc :

$$r = 0,3368$$

$$l = 62,3$$

$$t = 15^{\circ}5.$$

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$	calculé
7,991	5,327	1,5001	1,4999
11,993	7,887	1,5206	1,5206
15,992	10,318	1,5502	1,5495
19,942	12,580	1,5851	1,5866

Il est certain d'après cela que le rapport $\frac{a_1}{a_3}$ n'est plus cons-

tant : les choses se passent donc autrement que dans le premier régime.

Mais comme le montre la dernière colonne, la variation de $\frac{a_1}{a_3}$ en fonction de l'amplitude est bien représentée par :

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,4835 + 0,001031 a_1^2.$$

Chloroforme.

Tube $r = 0,3368$ $l = 69.5$ $t = 13^{\circ}8.$

1^{re} mesure $2 a_1 = 16,828 - 8,782 = 8,046$ (1^{er} mai 1910).

Mesure de $2 a_3$:

$$\begin{array}{rcl} 15,364 & > & 5,294 \\ 10,070 & > & 5,287 \\ 15,357 & > & 5,289 \\ 10,068 & > & 5,289 \end{array} \quad \text{moyenne : } 2 a_3 = 5,290,$$

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,5210.$$

2^e mesure $2 a_1 = 18,800 - 6,796 = 12,004.$

Mesure de $2 a_3$:

$$\begin{array}{rcl} 8,740 & > & 7,800 \\ 16,540 & > & 7,805 \\ 8,735 & > & 7,802 \\ 16,537 & > & 7,802 \end{array} \quad \text{moyenne : } 2 a_3 = 7,802,$$

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,5386.$$

Je n'ai fait ici de mesures que pour deux valeurs de a_1 ; elles sont représentées par

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,5064 + 0,000900 a_1^2.$$

mais nous rencontrerons plus loin d'autres séries plus complètes.

Je citerai même dans la suite des expériences se rapportant à une seule valeur de a_1 et qui serviront de vérification pour les conclusions que nous aurons déduites d'expériences plus complètes.

Chloroforme.

Tube $r = 0,2597$ $l = 60,71$ $t = 14^{\circ}3$.

1^{re} mesure : $2 a_1 = 11^{\text{cm}} 973$.

15,980		
9,066	>	6,914
15,978	>	6,912
9,070	>	6,908
16,010	>	6,940
9,086	>	6,924
15,999	>	6,913

moyenne : $2 a_3 = 6,918$,

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,7308.$$

2^e mesure : $2 a_1 = 7,984$.

14,938		
10,244	>	4,694
14,932	>	4,688
10,242	>	4,690
14,939	>	4,697
10,240	>	4,699

moyenne : $2 a_3 = 4,695$,

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,700.$$

Ces deux mesures sont représentés par

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,6748 + 0,00153 a_1^2$$

Oxyde d'éthyle (décembre 1909).

C'est un échantillon du commerce qui n'est pas tout à fait pur, mais c'est le même échantillon que dans l'étude du premier régime.

1^{re} expérience $r = 0,3339$ déjà employé en premier régime.

$$l = 69^{\text{cm}} 5 \quad t = 16^{\circ} 8 \quad \mu = 0,720.$$

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
3,970	2,690	1,477
7,934	5,330	1,489
11,891	7,886	1,507
15,941	10,400	1,533

Les valeurs de $\frac{a_1}{a_3}$ sont bien représentées par

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,475 + 0,000917 a_1^2$$

Cette expérience montre bien encore que $\frac{a_1}{a_3}$ dépend de l'amplitude. C'est encore plus visible sur les expériences suivantes faites aussi avec l'éther.

2^e expérience avec l'éther $r = 0,3339$ $l = 57^{\text{cm}} 5$ $t = 16^{\circ}$.

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
4,012	2,746	1,461
7,998	5,430	1,473
11,950	7,992	1,495
15,970	10,452	1,527
19,946	12,790	1,560

Résultats représentés par $\frac{a_1}{a_3} = 1,456 + 0,00110 a_1^2$

3^e expérience avec l'éther $r = 0,3339$ $l = 42^{\text{cm}} 7$ $t = 16^{\circ} 4$.

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
4,006	2,820	1,420
7,992	5,561	1,438
11,982	8,158	1,469
15,974	10,564	1,512
19,966	12,712	1,570

Résultats représentés par $\frac{a_1}{a_3} = 1,415 + 0,00150 a_1^2$

4^e expérience avec l'éther $r = 0,2597$ $l = 67^{\text{cm}} 6$ $t = 16^{\circ}$.

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
3,935	2,356	1,670
7,985	4,755	1,679
11,917	6,946	1,715
15,867	9,046	1,754
19,815	11,024	1,798

Résultats représentés par $\frac{a_1}{a_3} = 1,660 + 0,00141 a_1^2$

5^e expérience avec l'éther $r = 0,2222$ $l = 67^{\text{cm}} 3$ $t = 16^{\circ}$.

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
3,944	2,190	1,801
7,956	4,321	1,827
11,946	6,410	1,862
15,903	8,362	1,902
19,935	10,128	1,968

Représentés par $\frac{a_1}{a_3} = 1,792 + 0,00174 a_1^2$

Acétone, $\text{CH}_3 \text{ CO CH}_3$ (pure).

1 ^{re} expérience :	$r = 0,3368$	$l = 68,7$	$t = 13^{\circ}8.$	
14,830	16,790	17,990	19,978	21,950
10,810	8,754	5,992	3,995	2,008
$2 a_1 = 4,020$	$2 a_1 = 8,036$	$2 a_1 = 11,998$	$2 a_1 = 15,983$	$2 a_1 = 19,942$

 Mesures de $2 a_3$:

1,458					
4,094 > 2,636	9,294 > 5,206	15,644 > 7,652	16,738 > 9,980	17,784 > 12,280	
1,460 > 2,634	14,500 > 5,196	7,992 > 7,658	6,758 > 9,998	5,504 > 12,276	
4,078 > 2,618	9,304 > 5,194	15,650 > 7,656	16,756 > 10,004	17,780 > 12,266	
1,438 > 2,640	14,498	7,994	6,752	5,514	
4,070 > 2,632					

Moyennes :

$2 a_3 = 2,630$	$2 a_3 = 5,199$	$2 a_3 = 7,655$	$2 a_3 = 9,995$	$2 a_3 = 12,274$
$\frac{a_1}{a_3} = 1,530$	$\frac{a_1}{a_3} = 1,546$	$\frac{a_1}{a_3} = 1,5665$	$\frac{a_1}{a_3} = 1,598$	$\frac{a_1}{a_3} = 1,625$
Calculé 1,532	1,546	1,565	1,593	1,628

Comme le montre cette dernière ligne, les valeurs de $\frac{a_1}{a_3}$ sont bien représentées par :

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,530 + 0,00098 a_1^2.$$

Acétone.

 1^{er} mai.

2 ^e expérience :	$r = 0,3368$	$l = 55^{\text{cm}} 1$	$t = 13^{\circ}2.$
11,100	14,200	16,240	
3,104	2,258	0,264	
$2 a_1 = 7,996$	$2 a_1 = 11,962$	$2 a_1 = 15,976$	

9,728	4,240	13,126
4,448 > 5,280	11,994 > 7,754	2,990 > 10,136
> 5,262	4,248 > 7,746	13,130 > 10,140
9,710 > 5,267	11,990 > 7,742	2,995 > 10,135
4,443 > 5,267	4,246 > 7,744	13,122 > 10,127
9,710		

Moyennes :

$2 a_3 = 5,268$	$2 a_3 = 7,746$	$2 a_3 = 10,135$
$\frac{a_1}{a_3} = 1,518$	$\frac{a_1}{a_3} = 1,544$	$\frac{a_1}{a_3} = 1,576$

Ces nombres sont bien représentés par :

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,499 + 0,00120 a_1^2.$$

3^e expérience sur l'acétone.1^{er} mai.

$r = 0,3368$	$l = 42,1$	$t = 13^{\circ}8.$
8,448	14,440	16,460
0,536	2,478	0,486
$2 a_1 = 7,912$	$2 a_1 = 11,962$	$2 a_1 = 15,974$

Mesure de $2 a_3$:

d'abord	$\left\{ \begin{array}{l} 5,690 \\ 0,352 \end{array} \right\} > 5,338$	4,166	13,196
		$> 7,910$	2,920 > 10,276
après	$\left\{ \begin{array}{l} 7,084 \\ 1,752 \end{array} \right\} > 5,332$	12,074 > 7,902	13,208 > 10,288
avoir	$\left\{ \begin{array}{l} 4,172 \\ 1,752 \end{array} \right\} > 5,338$	4,172 > 7,896	2,924 > 10,284
déplacé	$\left\{ \begin{array}{l} 7,090 \\ 1,750 \end{array} \right\} > 5,340$	12,068 > 7,908	13,192 > 10,268
la		4,160 > 7,908	13,192 > 10,284
lunette			2,908 > 10,284

Moyennes :

$2 a_3 = 5,338$	$2 a_3 = 7,904$	$2 a_3 = 10,280$
$\frac{a_1}{a_3} = 1,482$	$\frac{a_1}{a_3} = 1,514$	$\frac{a_1}{a_3} = 1,553$

Ces 3 nombres sont bien représentés par :

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,458 + 0,00150 a_1^2.$$

Aldéhyde (pure).

$r = 0,2222$	$l = 52,1$	$t = 12^{\circ}5.$
15,570	17,541	19,560
7,600	5,610	3,594
$2 a_1 = 7,970$	$2 a_1 = 11,931$	$2 a_1 = 15,966$
13,874	14,850	
9,186 > 4,688	8,008 > 6,842	15,744 > 8,834
13,868 > 4,682	14,856 > 6,848	6,910 > 8,841
9,188 > 4,680	8,012 > 6,844	15,751 > 8,845
13,865 > 4,677	14,846 > 6,834	6,906 > 8,845

Moyennes :

$2 a_3 = 4,683$	$2 a_3 = 6,843$	$2 a_3 = 8,840$
$\frac{a_1}{a_3} = 1,701$	$\frac{a_1}{a_3} = 1,743$	$\frac{a_1}{a_3} = 1,806$

Ces valeurs de $\frac{a_1}{a_3}$ sont bien représentées par :

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,665 + 0,002164 a_1^2.$$

Tétrachlorure de carbone CCl₄.

$r = 0,3368$	$l = 47^{\text{cm}} 7$	$t = 12^{\circ}9.$	
15,564	17,550	19,580	21,580
7,594	5,630	3,584	1,601
$2 a_1 = 7,970$	$2 a_1 = 11,920$	$2 a_1 = 15,996$	$2 a_1 = 19,979$
13,900	14,966	15,980	16,854
9,072 > 4,828	7,890 > 7,076	6,714 > 9,266	5,574 > 11,280
13,907 > 4,835	14,958 > 7,068	15,980 > 9,266	16,850 > 11,276
9,074 > 4,833	7,886 > 7,072	6,706 > 9,274	5,580 > 11,270
13,896 > 4,822	14,970 > 7,084	15,988 > 9,282	
9,068 > 4,828	7,893 > 7,077	6,720 > 9,268	

Moyennes :

$$\begin{array}{cccc}
 2 a_3 = 4,829 & 2 a_3 = 7,076 & 2 a_3 = 9,270 & 2 a_3 = 11,276 \\
 \frac{a_1}{a_3} = 1,652 & \frac{a_1}{a_3} = 1,6845 & \frac{a_1}{a_3} = 1,726 & \frac{a_1}{a_3} = 1,772
 \end{array}$$

Ces valeurs de $\frac{a_1}{a_3}$ sont bien représentées par

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,630 + 0,001478 a_1^2.$$

Bromure d'éthylène $C^2H^4Br^2$.

$$r = 0,3368 \quad l = 45^{\text{cm}} 4 \quad t = 11^\circ.$$

11,670	13,630	16,858
3,724	1,708	0,942
$2 a_1 = 7,946$	$2 a_1 = 11,922$	$2 a_1 = 15,916$
9,834	4,350	11,630
$5,474 > 4,360$	$10,762 > 6,412$	$3,300 > 8,330$
$9,840 > 4,366$	$4,348 > 6,414$	12,866
$5,471 > 4,368$	$10,758 > 6,410$	$4,540 > 8,326$
	$4,354 > 6,404$	$12,872 > 8,332$
		$4,540 > 8,332$

Moyennes :

$$\begin{array}{ccc}
 2 a_3 = 4,365 & 2 a_3 = 6,410 & 2 a_3 = 8,330 \\
 \frac{a_1}{a_3} = 1,820 & \frac{a_1}{a_3} = 1,860 & \frac{a_1}{a_3} = 1,911
 \end{array}$$

Valeurs bien représentées par

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,794 + 0,00182 a_1^2.$$

Voici les expériences faites avec 2 tubes de rayons $r = 0,432$
et $r = 0,560$.

Tétrachlorure de carbone.

$$r = 0,432 \quad l = 66^{\text{cm}} 9 \quad t = 17^{\circ} \quad \mu = 1,601$$

$$16,013 \quad 18 \quad 20,090 \quad 22,090$$

$$8,079 \quad 6,032 \quad 4,112 \quad 2,160$$

$$2 a_1 = 7,934 \quad 2 a_1 = 11,968 \quad 2 a_1 = 15,978 \quad 2 a_1 = 19,930$$

Mesure de $2 a_3$:

$$\begin{array}{llll} 14,660 & 15,880 & 17,114 & 18,190 \\ > 5,328 & > 7,876 & > 10,392 & > 12,752 \\ 9,332 & 8,004 & 6,722 & 5,438 & > 12,760 \\ > 5,336 & > 7,883 & > 10,386 & > 12,750 \\ 14,668 & 15,887 & 17,108 & 18,198 & > 12,750 \\ > 5,331 & > 7,887 & > 10,388 & > 12,750 \\ 9,337 & 8,000 & 6,720 & 5,448 & > 12,750 \\ > 5,315 & & & & > 12,750 \\ 14,652 & & & & > 12,750 \end{array}$$

Moyennes :

$$2 a_3 = 5,328 \quad 2 a_3 = 7,881 \quad 2 a_3 = 10,390 \quad 2 a_3 = 12,753$$

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,5006 \quad \frac{a_1}{a_3} = 1,520 \quad \frac{a_1}{a_3} = 1,539 \quad \frac{a_1}{a_3} = 1,562$$

Ces 4 nombres s'accordent avec

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,488 + 0,00077 a_1^2.$$

Oxyde d'éthyle.

$$r = 0,560 \quad l = 64^{\text{cm}} 4 \quad t = 15^{\circ} \quad \mu = 0,720.$$

$$2 a_1 = 7,956 \quad 2 a_1 = 11,948 \quad 2 a_1 = 15,916 \quad 2 a_1 = 19,902$$

Mesure de $2 a_3$:

$$\begin{array}{llll} 13,156 & 14,286 & 16,080 & 17,070 \\ > 6,270 & > 9,306 & > 12,230 & > 15,085 \\ 6,886 & 4,980 & 3,850 & 1,985 & > 15,085 \\ > 6,264 & > 9,312 & > 12,250 & > 15,129 \\ 13,150 & 14,292 & 16,090 & 17,454 & > 15,129 \\ > 6,266 & > 9,310 & > 12,252 & > 15,129 \\ 6,884 & 4,982 & 3,840 & 2,325 & > 15,129 \\ > 6,262 & & > 12,252 & > 15,129 \\ 13,146 & & 16,092 & 17,350 & > 15,072 \\ & & & 2,278 & > 15,072 \end{array}$$

Moyennes :

$$\begin{array}{cccc}
 2 a_3 = 6,264 & 2 a_3 = 9,310 & 2 a_3 = 12,247 & 2 a_3 = 15,095 \\
 \frac{a_1}{a_3} = 1,270 & \frac{a_1}{a_3} = 1,284 & \frac{a_1}{a_3} = 1,299 & \frac{a_1}{a_3} = 1,317
 \end{array}$$

Ces valeurs de $\frac{a_1}{a_3}$ sont bien représentées par

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,263 + 0,00054 a_1^2.$$

Nous verrons plus loin d'autres mesures faites avec le tube $r = 0,560$.

Sulfure de carbone.

Tube $r = 0,432$ $l = 66^{\text{cm}}$ $t = 20^\circ$ $\mu = 1,270$.

14,062	16,082	18,096	20,090
6,081	4,092	2,155	0,164
$2 a_1 = 7,981$	$2 a_1 = 11,990$	$2 a_1 = 15,941$	$2 a_1 = 19,926$
6,964	5,554	15,844	2,752
$13,034 > 6,070$	$14,586 > 9,032$	$4,061 > 11,783$	$17,181 > 14,432$
$6,966 > 6,068$	$5,560 > 9,026$	$15,851 > 11,790$	$17,150$
$13,028 > 6,062$	$14,586 > 9,026$	$4,070 > 11,781$	$2,712 > 14,438$

Moyennes :

$$\begin{array}{cccc}
 2 a_3 = 6,067 & 2 a_3 = 9,028 & 2 a_3 = 11,786 & 2 a_3 = 14,435 \\
 \frac{a_1}{a_3} = 1,315 & \frac{a_1}{a_3} = 1,328 & \frac{a_1}{a_3} = 1,351 & \frac{a_1}{a_3} = 1,378
 \end{array}$$

Ces 4 nombres sont bien représentés par

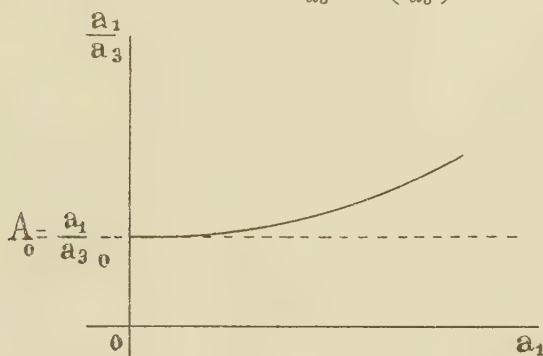
$$\frac{a_1}{a_3} = 1,303 + 0,000733 a_1^2.$$

II. — **Existence d'un deuxième régime d'oscillation. — Son interprétation.** — Ces résultats mettent bien en évidence que pour les faibles amortissements $\frac{a_1}{a_3}$ n'est plus indépendant de l'amplitude.

Le phénomène a donc changé de nature. Il existe un deuxième régime d'oscillation.

Le 1^{er} régime est caractérisé par $\frac{a_1}{a_3} = \text{constante}$.

Le 2^e régime est caractérisé par $\frac{a_1}{a_3} = \left(\frac{a_1}{a_3}\right)_0 + \alpha a_1^2$.



Cette équation représente (en portant a_1 en abscisses et $\frac{a_1}{a_3} = A$ en ordonnées) une parabole ayant pour axe l'axe des ordonnées.

Ce qui, au point de vue physique, peut s'énoncer en disant :

Pour des amplitudes infiniment petites, le rapport $\frac{a_1}{a_3}$ est encore indépendant de l'amplitude.

Donc pour des amplitudes infiniment petites, l'équation du mouvement s'écrit encore :

$$(15). \quad m \frac{d^2 a}{dt^2} + f_2 l \frac{da}{dt} + c a = 0.$$

Cette équation donne donc lieu à la même intégrale que dans le premier régime et les équations de condition sont analogues.

Si donc on désigne par T' la période des oscillations infiniment petites et si on pose $A_o = \left(\frac{a_1}{a_3} \right)_o$ on est conduit, comme dans le cas du 1^{er} régime, à la relation

$$(16) \quad f_2 l = \frac{2 m \log A_o}{T' \log e}$$

ou bien

$$(16 \text{ bis}) \quad f_2 = \frac{2 \pi r^2 \mu \log A_o}{T' \log e}$$

qui permet de calculer f_2 , car T' est donné comme dans le 1^{er} régime par

$$T' = T \sqrt{1 + \frac{\log^2 A_o}{4 \pi^2 \log^2 e}} \quad \text{avec } T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$$

Calculons au moyen des expériences précédentes les valeurs de f_2 que donne cette formule :

Chloroforme.

$r = 0,3368$	$l = 62,3$	$f_2 = 0,3753$	$\log A_o = 0,1712$	$f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,1478 \text{ (15°5)}$
	$l = 69,5$	$f_2 = 0,3692$	$\log A_o = 0,1779$	$f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,1511 \text{ (13°9)}$
$r = 0,2597$	$l = 60,7$	$f_2 = 0,2953$	$\log A_o = 0,2238$	$f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,1519 \text{ (14°2)}$
Le 1 ^{er} régime a donné $f_1 = 0,1517 \text{ (13°6)}$ et $f_1 = 0,1497 \text{ (14°)}$				

Ether ordinaire.

$r = 0,3339$	$l = 69,5$	$f_2 = 0,1655$	$\log A_o = 0,1688$	$f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,0642 \text{ (16°7)}$
	$l = 57,5$	$f_2 = 0,1760$	$\log A_o = 0,1632$	$f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,0658 \text{ (16°)}$
	$l = 42,7$	$f_2 = 0,1885$	$\log A_o = 0,1507$	$f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,0654 \text{ (16°4)}$
$r = 0,2597$	$l = 67,6$	$f_2 = 0,1323$	$\log A_o = 0,2200$	$f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,0663 \text{ (15°7)}$

$$r = 0,2222 \quad l = 67,3 \quad f_2 = 0,1115 \quad \log A_o = 0,2538 \quad f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,0651 \quad (16^{\circ}5)$$

Le 1^{er} régime a donné $f_1 = 0,0663 \quad (13^{\circ}3)$

Acétone.

$$r = 0,3368 \quad l = 68,7 \quad f_2 = 0,2065 \quad \log A_o = 0,1847 \quad f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,0878 \quad (13^{\circ}8)$$

$$l = 55,1 \quad f_2 = 0,2197 \quad \log A_o = 0,1758 \quad f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,0888 \quad (13^{\circ}2)$$

$$l = 42,1 \quad f_2 = 0,2341 \quad \log A_o = 0,1638 \quad f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,0882 \quad (13^{\circ}8)$$

Le 1^{er} régime a donné $f_1 = 0,0868 \quad (14^{\circ}4)$

Bromure d'éthylène.

$$r = 0,3368 \quad l = 45,4 \quad f_2 = 0,9440 \quad \log A_o = 0,2538 \quad f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,5500 \quad (11^{\circ})$$

Le 1^{er} régime a donné $f_1 = 0,5200 \quad (11^{\circ}2)$

Aldéhyde.

$$r = 0,2222 \quad l = 52,1 \quad f_2 = 0,1209 \quad \log A_o = 0,2214 \quad f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,06518$$

Tétrachlorure de carbone.

$$r = 0,3368 \quad l = 47,7 \quad f_2 = 0,5694 \quad \log A_o = 0,2122 \quad f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,2780 \quad (12^{\circ}9)$$

$$r = 0,432 \quad l = 66,9 \quad f_2 = 0,6382 \quad \log A_o = 0,1730 \quad f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,2540 \quad (17^{\circ})$$

Ether ordinaire.

$$r = 0,560 \quad l = 64,4 \quad f_2 = 0,2898 \quad \log A_o = 0,1014 \quad f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,0675 \quad (15^{\circ})$$

Sulfure de carbone.

$$r = 0,432 \quad l = 66 \quad f_2 = 0,3400 \quad \log A_o = 0,1150 \quad f_2 \times \frac{\log A_o}{\log e} = 0,0899 \quad (20^{\circ})$$

L'examen des valeurs de f_2 obtenues pour un même liquide sous des longueurs et des rayons différents montre que ce coefficient f_2 dépend de la longueur et du rayon de la colonne de liquide : ce n'est plus une caractéristique du liquide.

Mais si on compare les valeurs de f_2 aux valeurs correspondantes de $\log A_o$, on voit de suite qu'elles varient en sens inverse l'une de l'autre et on peut constater que : *pour un liquide donné à une température donnée, le produit $f_2 \log A_o$ est une constante caractéristique du liquide.*

Bien mieux encore, si on forme l'expression

$$f_2 \frac{\log A_o}{\log e}$$

on voit que pour les quatre premiers corps qui ont aussi été étudiés au premier régime, on retrouve la valeur obtenue pour f_1 dans le premier régime.

La cinquième colonne du tableau précédent contient les valeurs de

$$f_2 \frac{\log A_o}{\log e}$$

La sixième colonne contient les valeurs de f_1 et on voit (eu égard aux petites différences de température) que l'on a bien

$$(18) \quad f_2 \frac{\log A_o}{\log e} = f_1$$

Donc si on tient compte de l'équation (16 bis), on peut écrire :

$$(19) \quad f_1 = \frac{2 \pi r^2 \mu \log^2 A_o}{T^v \log^2 e}$$

qui permet de calculer le coefficient de frottement f_1 au moyen du deuxième régime d'oscillation, ou en tenant compte de

$$f_1 = 8\pi\eta$$

on a

$$(20) \quad \eta = \frac{\mu r^2 \log^2 A_o}{4 T' \log^2 e}$$

Je montrerai plus loin que les valeurs de η obtenues par cette méthode (2^e régime) concordent bien avec celles obtenues par la méthode de Poiseuille.

III. — **Lois du deuxième régime d'oscillation.** — Les deux dernières équations (d'ailleurs équivalentes) de la page précédente peuvent s'écrire :

$$(21) \quad \frac{\log^2 A_o}{\log^2 e} = \frac{f_1}{2 \pi \mu} \times \frac{T'}{r^2}$$

et

$$(22) \quad \frac{\log^2 A_o}{\log^2 e} = 4 \frac{\eta}{\mu} \times \frac{T'}{r^2}$$

D'où les lois suivantes :

Pour un liquide donné, le carré du logarithme de l'amortissement (oscillations infiniment petites), c'est-à-dire $\log^2 A_o$ est proportionnel :

1° A la période (loi des périodes);

2° A l'inverse du carré des diamètres (loi des diamètres).

IV. — **Relation du coefficient α avec les dimensions de la colonne liquide.** — L'équation caractéristique du deuxième régime d'oscillation est :

$$(23) \quad \frac{a_1}{a_3} = A_o + \alpha a_1^2.$$

Nous venons de voir comment le coefficient A_o est en relation avec le coefficient de frottement.

Cherchons maintenant sous quelles dépendances se trouve le coefficient α .

Remarquons d'abord que l'équation précédente peut s'écrire :

$$\frac{a_1}{a_3} = A_o \left(1 + \frac{\alpha}{A_o} a_1^2 \right)$$

donc le coefficient $\frac{\alpha}{A_o}$ a forcément les dimensions de l'inverse du carré d'une longueur.

Si pour les différentes expériences rapportées ci-dessus et relatives au deuxième régime on calcule les valeurs de $\frac{\alpha}{A_o}$, on obtient les résultats suivants :

Chloroforme	$r = 0,3368$	$l = 62,3$	$\frac{\alpha}{A_o} = 0,000695$	$\frac{\alpha}{A_o} r l = 0,0146$
		69,5	0,000600	0,0139
id.	$r = 0,2597$	60,7	0,000913	0,0147
Éther	$r = 0,3339$	69,5	0,000622	0,0145
		57,5	0,000756	0,0150
		42,7	0,001060	0,0149
id.	$r = 0,2597$	67,6	0,000849	0,0149
id.	$r = 0,2222$	67,3	0,000971	0,0145
id.	$r = 0,560$	64,4	0,000430	0,0153
Acétone	$r = 0,3368$	68,7	0,000641	0,01483
id.	$r = 0,3368$	55,1	0,000800	0,01480
id.	$r = 0,3368$	42,1	0,001029	0,01490
Aldéhyde	$r = 0,2222$	52,1	0,001300	0,01500
CCl ⁴	$r = 0,3368$	47,7	0,000906	0,01456
id.	$r = 0,432$	66,9	0,000517	0,01500
C ² H ⁴ Br ²	$r = 0,3368$	45,4	0,001010	0,01530
CS ²	$r = 0,432$	66	0,000560	0,01550

Il semble bien, comme le montre la dernière colonne, que l'expression

$$k = \frac{\alpha}{A_o} r l$$

est indépendante à la fois des dimensions de la colonne et de la nature du liquide.

C'est donc une constante absolue (au moins à la température de 15°, moyenne des expériences précédentes où t varie de 11 à 17°).

La valeur moyenne de cette constante k à la température de 15° est donc, d'après le tableau précédent :

$$k = 0,0148.$$

Et alors à 15° l'équation du deuxième régime s'écrit

$$(25) \quad \frac{a_1}{a_3} = A_o \left(1 + \frac{0,0148}{r l} a_1^2 \right)$$

Elle ne contient plus que la seule constante A_o que l'on déterminera au moyen de cette équation après avoir obtenu une seule valeur expérimentale de $\frac{a_1}{a_3}$.

V. — Mesure du coefficient de frottement d'un liquide au moyen du deuxième régime d'oscillation dans un tube en U. — Je transcris dans ce paragraphe toutes les valeurs de η que j'ai calculées au moyen des expériences du deuxième régime.

1° Expériences dans lesquelles, pour une même colonne, on a employé au moins deux valeurs différentes de a_1 , ce qui permet de calculer la formule

$$\frac{a_1}{a_3} = A_o + \alpha a_1^2$$

η se calcule alors par la formule

$$\eta = \frac{\mu r^2 \log^2 A_o}{4 T' \log^2 e}$$

Chloroforme.

$r = 0,3368$			Thorpe et Rodger
$l = 62,3$		J'obtiens	donnent
$t = 15^\circ 6$	$A_o = 1,4835$	$\eta = 0,00588$	0,00590
$\mu = 1,500$			
$r = 0,3368$			
$l = 69,5$	$A_o = 1,5064$	$\eta = 0,00602$	0,00600
$t = 13^\circ 8$			
$\mu = 1,501$			

$r = 0,2597$			
$l = 60,7$	$A_o = 1,6745$	$\eta = 0,00602$	$0,00597$
$t = 14^{\circ}2$			
$\mu = 1,501$			

Éther ordinaire.

$r = 0,3339$			
$l = 69,5$	$A_o = 1,475$	$\eta = 0,00255$	$0,00243$ (Thorpe)
$t = 16^{\circ}8$			$0,00267$ (Vykander)
$\mu = 0,720$			

$r = 0,3339$	$A_o = 1,456$	$\eta = 0,00261$	$0,00244$ (Thorpe)
$l = 57,5$			$0,00269$ (Vykander)
$t = 16^{\circ}$			

$r = 0,3339$	$A_o = 1,415$	$\eta = 0,00259$	
$l = 42,7$			
$t = 16^{\circ}4$			

$r = 0,2597$	$A_o = 1,660$	$\eta = 0,00262$	
$l = 67,6$			
$t = 16^{\circ}$			

$r = 0,2222$	$A_o = 1,792$	$\eta = 0,00259$	
$l = 67,3$			
$t = 16^{\circ}$			

$r = 0,560$	$A_o = 1,263$	$\eta = 0,00266$	
$t = 15^{\circ}$			
$l = 64,4$			

Acétone.

$r = 0,3368$		Je trouve	Thorpe et Rodger
$l = 68,7$	$A_o = 1,530$	$\eta = 0,00349$	$0,00345$
$t = 13^{\circ}8$			
$\mu = 0,8036$			

$r = 0,3368$	$A_o = 1,499$	$\eta = 0,00352$	$0,00347$
$l = 55,1$			
$t = 13^{\circ}2$			

$$r = 0,3368$$

$$l = 42,1 \quad A_o = 1,458 \quad \eta = 0,00350$$

$$t = 13^{\circ}8$$

Aldéhyde.

$$r = 0,2222$$

$$l = 52,1 \quad A_o = 1,665 \quad \eta = 0,00244 \quad 0,00238$$

$$t = 12,5$$

$$\mu = 0,785$$

Bromure d'éthylène.

$$r = 0,3368$$

$$l = 45,4 \quad A_o = 1,794 \quad \eta = 0,0219 \quad 0,0203$$

$$t = 11^{\circ}$$

$$\mu = 2,18$$

Ce nombre est un peu fort et cependant le même liquide a donné un résultat meilleur par l'emploi du premier régime. Je montrerai plus loin que cela tient à ce que l'expérience actuelle est déjà trop voisine du point critique.

Tétrachlorure de carbone.

$$r = 0,3368$$

$$l = 47,7 \quad A_o = 1,630 \quad \eta = 0,01104 \quad 0,01087$$

$$t = 12^{\circ}9$$

$$\mu = 1,607$$

$$r = 0,432$$

$$t = 17^{\circ} \quad A_o = 1,488 \quad \eta = 0,01012 \quad 0,01016$$

$$l = 66,9$$

Sulfure de carbone.

$$r = 0,432$$

$$l = 66 \quad A_o = 1,303 \quad \eta = 0,00358 \quad 0,00365$$

$$t = 20^{\circ}$$

$$\mu = 1,270$$

2° Expériences dans lesquelles on n'a opéré qu'avec une seule amplitude a_1 .

On n'a donc déterminé qu'une seule valeur de $\frac{a_1}{a_3}$; comme la température s'éloigne peu de 15° , on calcule alors Λ_o par la formule

$$\frac{a_1}{a_3} = \Lambda_o \left(1 + \frac{0,0148}{r \, l} a_1^2 \right)$$

et ensuite η se calcule comme ci-dessus.

Aldéhyde.

Dans le paragraphe précédent l'aldéhyde est étudiée seulement dans le tube $r = 0,2222$. Voici une expérience dans $r = 0,3368$ avec une seule valeur de a_1

$$r = 0,3368 \quad l = 66 \quad t = 13^\circ 8 \quad \mu = 0,785$$

pour

$$2a_1 = 11,974$$

on a

$$2a_3 = 8,273$$

donc

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,448$$

la formule précédente donne alors

$$\Lambda_o = 1,414$$

ce qui donne

$$\eta = 0,00232$$

$$\text{Thorpe et Rodger} \quad 0,00234$$

Tétrachlorure de carbone.

$$r = 0,3368 \quad l = 63,04 \quad t = 17^\circ 4 \quad \mu = 1,601$$

pour

$$2a_1 = 12,018$$

$$2a_3 = 7,076$$

donc

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,6984$$

la formule donne

$$A_o = 1,6570$$

on en déduit

$$\eta = 0,01024$$

Thorpe donne 0,01011

Sulfure de carbone.

$$r = 0,3368 \quad l = 62,8 \quad t = 16^{\circ}8 \quad \mu = 1,274$$

pour

$$2a_1 = 12,018$$

$$2a_3 = 8,337$$

donc

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,4415$$

On calcule alors

$$A_o = 1,4063$$

et

$$\eta = 0,00372$$

Thorpe et Rodger 0,00375

Alcool éthylique.

$$r = 0,560 \quad l = 64,4 \quad t = 16^{\circ} \quad \mu = 0,797$$

pour

$$2a_1 = 7,980$$

$$2a_3 = 4,820$$

donc

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,651$$

On obtient alors

$$A_o = 1,643$$

et

$$\eta = 0,0133$$

sur Landolt	0,0132
Thorpe et Rodger	0,0129

Aldéhyde.

$$r = 0,432 \quad l = 66,9 \quad t = 16^{\circ} \quad \mu = 0,785$$

pour

$$2a_1 = 11,968$$

$$2a_3 = 8,920$$

donc

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,340$$

la formule donne

$$A_o = 1,316$$

d'où l'on déduit

$$\eta = 0,00234$$

Thorpe et Rodger	0,00229
------------------	---------

Acétone.

$$r = 0,432 \quad l = 66,9 \quad t = 16^{\circ} \quad \mu = 0,802$$

pour

$$2a_1 = 11,968$$

$$2a_3 = 8,490$$

donc

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,409$$

On calcule alors

$$A_o = 1,383$$

$$\eta = 0,00334$$

Thorpe et Rodger	0,00332
------------------	---------

Iodure d'éthyle.

$$r = 0,3368 \quad l = 57,92 \quad t = 14^{\circ} \quad \mu = 1,953$$

pour

$$2a_1 = 11,978$$

$$2a_3 = 8,270$$

d'où

$$\frac{a_1}{a_3} = 1,449$$

et le calcul donne alors

$$A_o = 1,4125$$

d'où

$$\eta = 0,00610$$

$$\text{Thorpe donne } 0,00616$$

On peut donc affirmer que soit par le premier, soit par le deuxième régime, on obtient de bonnes valeurs du coefficient de frottement.

Le procédé est particulièrement commode, puisque dans les deux cas (1^{er} ou 2^e régime), il suffit de déterminer expérimenta-

lement une seule valeur de $\frac{a_1}{a_3}$.

C'est évidemment sur cette détermination que l'on fera l'erreur principale, car : 1° la mesure de l n'a pas besoin d'être très précise : l n'entre que par la puissance 1/2; 2° la mesure de r par pesée au mercure est ici précise, car il ne s'agit plus de tubes capillaires et r entre seulement au carré; 3° enfin l'installation expérimentale est moins délicate que par la méthode de Poiseuille.

M. Brillouin estime (*Viscosité des liquides*, p. 116) que les précautions les plus minutieuses ne peuvent donner le diamètre des capillaires avec une erreur inférieure à $\frac{1}{400}$, ce qui conduit déjà à une erreur de 1/100 sur la valeur de η . Si on ajoute les erreurs commises sur la longueur du tube, le débit, la pression, la précision de la méthode de Poiseuille est certes inférieure à 1/100.

Du reste si on fait le calcul de toutes les expériences de Poiseuille, on y trouve des écarts bien plus considérables.

J'ai réuni dans le tableau suivant les valeurs de η déduites des expériences de Poiseuille, dites expériences de la première

série (c'est-à-dire celles pour lesquelles la correction à l'entrée est négligeable). Eau : $t = 10^{\circ}$.

Tubes A.

Tube A	3 expériences	η varie de 0,01306 à 0,01307
$l = 10,05$		
Tube A ₁	7	0,01305 à 0,01308
$l = 7,58$		
Tube A ₂	5	0,01310 à 0,01315
$l = 5,11$		

Tubes B.

Tube B	3 expériences	η varie de 0,01315 à 0,01317
$l = 10,005$		
Tube B ₁	7	0,01312 à 0,01315
$l = 7,505$		
Tube B ₂	5	0,01307 à 0,01311
$l = 4,9375$		
Tube B ₃	6	0,01303 à 0,01307
$l = 2,3575$		

Tubes C.

Tube C	3 expériences	η varie de 0,01318 à 0,01320
$l = 10,0325$		
C ₁	7	0,01312 à 0,01313
7,495		
C ₂	5	0,01299 à 0,01303
4,97		
C ₃	6	0,01309 à 0,01311
2,44		
C ₄	7	0,01249 à 0,01285
1,015		

Tubes D.

Pour les expériences faites avec les quatre tubes D, les valeurs de η sont comprises entre 0,01308 et 0,01316, sauf la deuxième expérience du tube D qui donne 0,01292.

Tubes E.

Tube E	4 expériences	η varie de 0,01305 à 0,01309
E ₁	5	0,01353 à 0,01360
E ₂	7	0,01317 à 0,01325
Tube F	8 expériences	η varie de 0,01309 à 0,01350

Ainsi tous les nombres de Poiseuille sont compris entre 0,0125 et 0,0136.

Pour un tube donné, les résultats sont toujours très voisins les uns des autres (sauf pour les tubes C₄ et F); ce qui prouve que la loi des pressions se vérifie bien, les pressions et les débits sont mesurés avec précision. Les écarts se présentent surtout d'un tube à l'autre. La principale cause d'erreur est donc la mesure du rayon; toutefois pour les tubes C₄ et F, il est probable qu'il y a des erreurs sur la mesure des débits.

Je pense que les deux méthodes que j'ai données donnent une précision voisine de la méthode de Poiseuille. En tous cas, avec beaucoup moins de minutieuses précautions, elles donnent des résultats suffisamment approchés.

Je vais montrer maintenant que, comme dans la méthode d'écoulement uniforme de Poiseuille, il est indispensable de se placer dans des conditions convenables par rapport au point critique.

Auparavant, je transcris d'abord quelques mesures relatives du coefficient η par l'emploi du deuxième régime.

MESURES RELATIVES DU COEFFICIENT η PAR L'EMPLOI
DU DEUXIÈME RÉGIME

Dans un tube de rayon r on a pour un premier liquide

$$\eta = \frac{\mu r^2 \log^2 A_o}{4T' \log^2 e}$$

Pour un deuxième liquide placé dans le même tube on a

$$\eta_1 = \frac{\mu_1 r^2 \log^2 A_{o1}}{4T'_1 \log^2 e}$$

en divisant membre à membre il vient

$$(1) \quad \frac{\eta}{\eta_1} = \frac{\mu}{\mu_1} \frac{T'_1}{T'} \frac{\log^2 A_o}{\log^2 A_{o1}}$$

On sait d'ailleurs que la période T' est donnée par

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} \sqrt{1 + \frac{\log^2 A_o}{7,45}}$$

Or pour $A_o = 1,8$ on a

$$\sqrt{1 + \frac{\log^2 A_o}{7,45}} = 1,0043$$

Donc tant que A_o est $< 1,8$ (et nous verrons que pratiquement il ne faut pas dépasser 1,8) on ne commet en prenant T à la place de T' qu'une erreur $< \frac{4}{1000}$ il en résulte que si on opère avec les deux liquides dans le même tube et sous la même longueur l'équation (1) ci-dessus s'écrit à moins de $\frac{1}{250}$ près

$$(2) \quad \frac{\eta}{\eta_1} = \frac{\mu}{\mu_1} \frac{\log^2 A_o}{\log^2 A_{o1}}$$

Il suffira de déterminer $A = \frac{a_1}{a_3}$ pour une valeur connue de a_1

de calculer A_o par la formule

$$A = A_o \left(1 + \frac{0,0148}{r l} a_1^2 \right)$$

dans laquelle une mesure approchée de r et de l suffit.

Je prends le chloroforme comme liquide de comparaison et le tube $r = 0,560$ et $l = 64,4$

Chloroforme $t = 16^\circ$ $\mu = 1,497$ $2a_1 = 11,948$ $2a_3 = 9,266$

d'où

$$A = 1,290 \quad A_o = 1,272 \quad \text{d'après Thorpe} \quad \eta_1 = 0,00588$$

$$\text{Eau} \quad t = 16^\circ \quad 2a_1 = 11,948 \quad 2a_3 = 7,841 \quad A = 1,524$$

d'où

$$A_o = 1,501$$

La formule (2) donne alors

$$\eta = 0,00588 \times 1,904 = 0,0120 \text{ à } 14^\circ$$

$$\text{CCl}_4 \quad t = 16^\circ \quad \mu = 1,601 \quad 2a_1 = 11,948 \quad 2a_3 = 8,687$$

d'où

$$A = 1,375 \quad A_o = 1,356$$

La formule (2) donne

$$\eta = 0,00588 \times 1,712 = 0,01007$$

CHAPITRE V

INTERPRETATION PHYSIQUE DES DEUX REGIMES D'OSCILLATION LEURS ANALOGUES DANS LES AUTRES FORMES D'APPAREILS

I. — Le premier régime d'oscillation est l'analogue du régime de Poiseuille dans l'écoulement uniforme. — Dans le premier régime d'oscillation, l'équation du mouvement est

$$m \frac{d^2 a}{dt^2} + f_1 l \frac{da}{dt} + ca = 0$$

Or nous avons vu que, pour un liquide donné, f_1 est une constante; il en résulte que le facteur $f_1 l$, qui caractérise le frottement total, est bien proportionnel à la longueur. Il est alors tout naturel d'admettre que dans ce premier régime, le glissement des molécules les unes sur les autres se produit uniquement dans le sens de la longueur : ce qui est le point de départ de l'hypothèse de l'emboîtement des tubes liquides dans la théorie de Navier qui conduit à la formule du régime de Poiseuille.

Le premier régime d'oscillation paraît donc bien l'analogue du régime de Poiseuille.

II. — Le deuxième régime d'oscillation est l'analogue du deuxième régime d'écoulement uniforme ou régime des tourbillons. — Dans le deuxième régime d'oscillation, l'équation du mouvement pour des amplitudes infiniment petites est

$$(26) \quad m \frac{d^2 a}{dt^2} + f_2 l \frac{da}{dt} + ca = 0$$

Mais ici f_2 n'est plus une constante pour un liquide donné et nous avons vu que l'on a

$$(27) \quad f_1 = f_2 \frac{\log A_0}{\log e}$$

de sorte que l'équation (26) peut s'écrire

$$m \frac{d^2 a}{dt^2} + f_1 l \frac{\log e}{\log A_0} \frac{da}{dt} + ca = 0$$

Et alors si nous comparons cette équation à celle du premier régime, nous sommes conduits à envisager les choses comme se passant de la façon suivante :

Dans le deuxième régime d'oscillation, tout se passe comme si, le coefficient de frottement f_1 étant le même que dans le premier régime, les molécules au lieu de glisser les unes sur les autres uniquement dans le sens de la longueur le faisaient sui-

vant un chemin de longueur $l_1 = \frac{\log e}{\log A_0}$, chemin toujours supérieur à la longueur l de la colonne liquide, car nous verrons plus loin que dans le deuxième régime, on a toujours $\log A_0 \leq \log e$ (Nous appellerons l_1 la longueur du chemin tourbillonnaire.)

En d'autres termes, le mouvement n'est plus linéaire, il est compliqué : il se produit des tourbillons.

Le deuxième régime d'oscillation est donc l'analogue du deuxième régime d'écoulement continu où Reynolds a mis en évidence l'existence de tourbillons au moyen de filets liquides colorés.

Entraînement d'un cylindre par un cylindre coaxial séparé du premier par un liquide visqueux. — M. Couette a montré aussi l'existence de deux régimes dans ce cas. Et la courbe représentant le phénomène (voir thèse Couette), comparée à celle de l'écoulement dans les tubes, fait prévoir que ces deux régimes correspondent aux deux régimes d'écoulement continu dans les tubes et par conséquent aux deux régimes d'oscillation. M. Couette a remarqué, en effet, que dans le deuxième régime de l'appareil à cylindres, la surface libre n'est plus lisse, mais agitée, ce qui semble indiquer l'existence de tourbillons. J'aurai du reste occasion de revenir sur ce point dans la deuxième partie de ce travail.

Oscillations dans son plan d'un disque circulaire immergé dans un liquide et tournant sous l'influence d'un couple proportionnel à l'écart. — Ce cas présente *a priori* une certaine analogie avec l'oscillation d'une colonne liquide dans un tube.

L'étude théorique (par exemple *Mécanique de M. Bouasse*, p. 85) du problème conduit, sous certaines approximations, au résultat suivant : le mouvement du disque est représenté par

$$I \frac{d\theta^2}{dt^2} + l \frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0$$

I moment d'inertie du disque;

θ élongation à l'époque t ;

C couple de torsion

en posant

$$f = \pi R^4 \sqrt{\frac{\omega \eta \rho}{I}}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$; R rayon du disque;

η coefficient de frottement du liquide;

ρ sa masse spécifique.

Dans tout ce qui précède, j'ai désigné la masse spécifique par μ ; avec cette notation le coefficient f précédent s'écrit :

$$(K) \quad f = \pi r^4 \sqrt{\frac{\pi \eta \mu}{T}}$$

Revenons maintenant à l'équation (26) du deuxième régime d'oscillation de la colonne liquide. Le coefficient du terme en $\frac{da}{dt}$ a pour valeur

$$f_2 l$$

c'est-à-dire

$$f_1 l \frac{\log e}{\log A_0}$$

Or nous avons vu plus haut que dans ce deuxième régime d'oscillation on a

$$f_1 = \frac{2\pi r^2 \mu \log^2 A_0}{T \log^2 e}$$

En tenant compte de cette relation, on a

$$f_2 l = f_1 l \frac{\log e}{\log A_0} = f_1 l \sqrt{\frac{2\pi r^2 \mu}{f_1 T}}$$

ou bien

$$f_2 l = \sqrt{\frac{2\pi r^2 l^2 \mu f_1}{T}}$$

et puisque l'on a

$$f_1 = 8\pi\eta$$

il vient finalement

$$(K') \quad f_2 l = 2\pi r l \sqrt{\frac{4\eta\mu}{T^v}}$$

Si on compare les expressions K (coefficient du terme en $\frac{d\theta}{dt}$ dans l'équation du disque) et K' (coefficient du terme en $\frac{da}{dt}$ dans l'équation d'oscillation de la colonne liquide), on voit que ces deux coefficients, qui jouent le même rôle dans les deux cas, dépendent de la même façon

et de la nature du liquide par le produit $\eta \mu$.

et de la période T'.

Il y a donc analogie entre le deuxième régime d'oscillation de la colonne liquide et le régime oscillatoire du disque isolé que l'on utilise dans la méthode de Coulomb.

Il est probable, d'après cela, que pour obtenir les deux régimes dans la méthode du disque, il faudra placer celui-ci entre deux disques fixes. Le premier régime se produira d'autant plus facilement que la distance du disque mobile aux deux disques fixes sera plus faible, comme pour une colonne dans un tube de petit rayon. Dans les deux cas, les lois du phénomène doivent être analogues.

Je dois faire observer que de ces différents cas, où on a observé l'existence de deux régimes, c'est seulement dans le cas de la colonne liquide oscillant dans un tube en U que l'on connaît maintenant la relation qui existe entre les deux régimes et le coefficient η .

CHAPITRE VI

**PASSAGE D'UN REGIME A L'AUTRE
POINT CRITIQUE. — REGION CRITIQUE**

I. — Point critique. — D'après ce que nous avons vu précédemment, les formules caractéristiques des deux régimes d'oscillation sont :

1^{er} régime :

$$(29) \quad f_1 = \frac{2\pi r^2 \mu}{T'} \frac{\log A}{\log e} = 8\pi \eta$$

2^{me} régime :

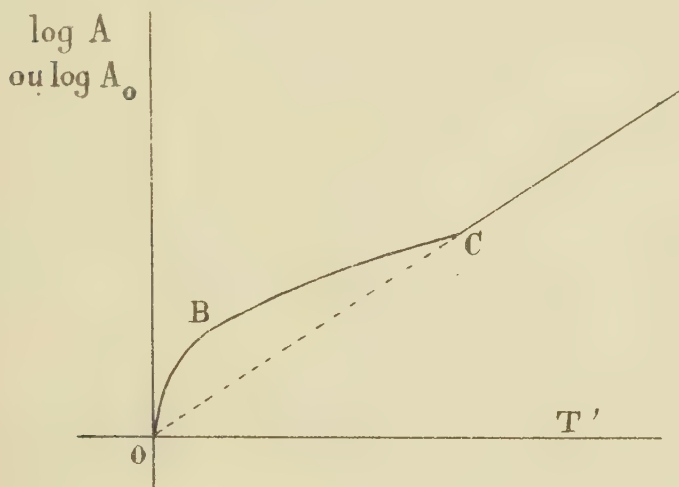
$$(30) \quad f_1 = \frac{2\pi r^2 \mu}{T'} \frac{\log^2 A_0}{\log^2 e} = 8\pi \eta$$

Imaginons alors un tube de rayon donné contenant un liquide donné et de longueur assez grande pour que, en diminuant progressivement la longueur de la colonne liquide, on puisse passer du premier au deuxième régime, alors les seules variables dans les équations précédentes sont : $\log A$ et T' dans la première, $\log A_0$ et T' dans la deuxième; représentons alors graphiquement les résultats en portant T' en abscisses et le $\log$ en ordonnées.

Premier régime. — Faisons diminuer l progressivement depuis la valeur l correspondant au début de l'apériodicité, alors T' diminue depuis l'infini et puisque $\frac{\log A}{T'}$ est constant dans le premier régime, celui-ci est représenté par une droite OA passant par l'origine.

Deuxième régime. — Faisons maintenant croître l à partir de zéro; il en est de même de T' et la deuxième équation (30) ci-

dessus montre alors que $\log A_0$ est représenté par une parabole BC ayant pour axe OT' et son sommet à l'origine : c'est le deuxième régime d'oscillation.



Le point C d'intersection des deux courbes, que nous appellerons le *point critique*, définit donc algébriquement le passage de l'un des régimes à l'autre.

En ce point, on a alors nécessairement :

$$(31) \quad \log A = \log A_0 = \log e$$

Nous désignerons par A_c cet amortissement critique; on a donc

$$A_c = e = 2,72$$

La période correspondante, que nous appellerons T'_c période critique, est alors donnée par

$$(32) \quad f_1 = \frac{2\pi l^2 \mu}{T'^2} = 8 \pi \eta$$

D'où les énoncés suivants :

II. — **Lois du point critique :** 1° *Loi de l'amortissement critique.* — Pour tous les liquides et tous les tubes

$$A_c = e = 2,72$$

2° Loi de la période critique.

$$T'_c = \frac{1}{4} \frac{\mu}{\eta} r^2.$$

La période critique est proportionnelle :

a) Au carré du rayon du tube;

b) Au rapport $\frac{\mu}{\eta}$.

Rapprochement. — Comme je l'ai indiqué déjà dans l'introduction, Reynolds a donné pour le point critique, dans le cas de l'écoulement continu, une loi analogue qui s'écrit :

$$(33) \quad \frac{1}{V_c} = \frac{1}{1000} \frac{\mu}{\eta} r.$$

Loi du point critique de Reynolds. — L'inverse de la vitesse critique est proportionnel :

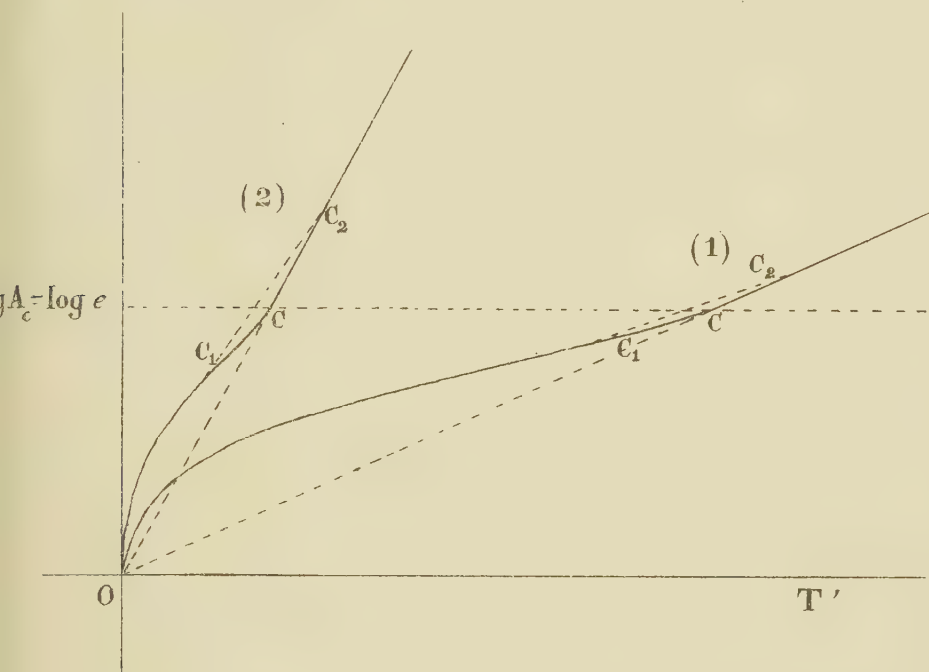
1° Au rayon du tube;

2° Au rapport $\frac{\mu}{\eta}$.

III. — **Région critique.** — J'ai dit que le point C représente *algébriquement* le passage de l'un des régimes à l'autre, mais il est certain que, pratiquement, ce passage se fait non pas brusquement, non pas par un point anguleux, mais progressivement, c'est-à-dire comme l'indique le graphique ci-contre, par le segment de courbe en pointillé $C_1 C_2$. Ce segment de courbe occupe évidemment, par raison de continuité (quelques expériences me l'ont du reste montré), la position indiquée sur la figure. Il en résulte donc que si on opère avec un amortissement voisin de 2,72, les formules du premier et du deuxième régime donneront pour η des valeurs trop fortes.

Je m'en suis, du reste, assuré par quelques expériences que je crois inutile de rapporter ici.

Donc, pratiquement, il existe non pas un point critique, mais une région critique qui s'étale sur des valeurs de $\log A$ situées de part et d'autre de la valeur critique : $\log A_c = \log e = 0,4346$.



On peut même, je dirai, deviner sur le graphique qu'en général elle s'étale d'autant plus que le rayon du tube est plus petit.

Remarquons, en effet, que la période critique a pour valeur

$$T'_c = \frac{1}{4} \frac{\mu}{\gamma} r^2.$$

Si on considère un liquide donné ($\frac{\mu}{\gamma}$ donné), on voit que si le rayon r devient double, T'_c devient quatre fois plus grand (c'est le cas de la figure précédente où les courbes ont été exactement tracées). On conçoit alors que dans le cas de la courbe (1), la courbe de raccord $C_1 C_2$ doit sans doute s'éloigner beaucoup moins des courbes représentatives du premier et du deuxième

régime que dans le cas de la courbe (2) et que, par suite, la région critique s'étale moins en ordonnées pour un tube de plus grand diamètre.

On constate un fait analogue pour l'étendue de la région critique dans le cas de l'écoulement uniforme.

Donc : de même que dans la méthode de Poiseuille, on est obligé de s'en tenir à des vitesses notablement inférieures à la vitesse critique, de même dans les deux méthodes d'oscillation étudiées ici il faudra s'en tenir à des valeurs de $\log A$ et de $\log A_0$ situées à une certaine distance de la valeur critique $\log A_c = \log e$.

Je crois pouvoir dire que, dans tous les cas, quel que soit le tube et quel que soit le liquide, on obtiendra de bonnes valeurs du coefficient de frottement en se tenant :

Pour le premier régime à des valeurs de $A \geq 5$.

Pour le deuxième régime à des valeurs de $A_0 < 1,85$.

CHAPITRE VII

LOI DES ETATS CORRESPONDANTS

Nous avons vu que les constantes critiques A_c et T'_c sont données par

$$\log A_c = \log e$$

$$f_1 = \frac{2 \pi r^2 \mu}{T'_c}$$

En tenant compte de ces relations, on peut transformer les équations caractéristiques des deux régimes de la façon suivante :

Premier régime.

Nous avons trouvé

$$f_1 = \frac{2 \pi r^2 \mu}{T'} \frac{\log A}{\log e}$$

qui, en tenant compte des relations ci-dessus, s'écrit

Deuxième régime.

Nous avons trouvé

$$f_1 = \frac{2 \pi r^2 \mu}{T'} \times \frac{\log^2 A}{\log^2 e}$$

qui, en tenant compte des relations ci-dessus, s'écrit

$$\frac{2 \pi r^2 \mu}{T'_c} = \frac{2 \pi r^2 \mu}{T'} \times \frac{\log A}{\log A_c} \quad , \quad \frac{2 \pi r^2 \mu}{T'_c} = \frac{2 \pi r^2 \mu}{T'} \frac{\log^2 A_o}{\log^2 A_c}$$

d'où l'on tire

• d'où l'on tire

$$(34) \quad \frac{\log A}{\log A_c} = \frac{T'}{T'_c}$$

$$(35) \quad \frac{\log^2 A_o}{\log^2 A_c} = \frac{T'}{T'_c}$$

Cela posé : soient A_c et T'_c les constantes critiques d'un premier liquide dans un tube quelconque ; A et T' l'amortissement et la période pour une longueur quelconque du même liquide dans le même tube ;

Soient, d'autre part, A'_c et T''_c les constantes critiques d'un deuxième liquide dans un tube quelconque ; A' et T'' l'amortissement et la période pour une longueur quelconque de ce liquide dans le même tube

Si on a

$$\frac{T'}{T'_c} = \frac{T''}{T''_c}$$

nous dirons que les périodes T' et T'' sont correspondantes.

Si on a

$$\frac{\log A}{\log A_c} = \frac{\log A'}{\log A'_c}$$

nous dirons que les logarithmes des amortissements sont correspondants.

Comme d'ailleurs M. Couette a montré que les phénomènes restent les mêmes, quelle que soit la nature du tube, on voit que les équations (34) et (35) conduisent à cette loi très générale.

Loi des états correspondants. — Première forme. — *Pour des périodes correspondantes, les logarithmes des amortissements sont correspondants, et cela pour les deux régimes, pour tous les liquides et pour tous les tubes.*

Si on remarque d'ailleurs que $\log A_c = \log e$ pour tous les liquides et tous les tubes, on a l'énoncé plus simple :

Deuxième forme. — Pour des périodes correspondantes,

l'amortissement est le même (quels que soient le régime, le liquide et le tube).

Résultat très général que nous retrouverons sous une forme analogue dans le cas de l'écoulement uniforme.

Remarque. — Nous avons été conduits à admettre que dans le deuxième régime le frottement se produisait suivant un chemin de longueur l_1 que nous avons appelée longueur du chemin tourbillonnaire définie par :

$$l_1 = l \frac{\log e}{\log \Lambda_o} = l \frac{\log \Lambda_c}{\log \Lambda_o}$$

et puisque dans le deuxième régime on a

$$\frac{\log \Lambda_c}{\log \Lambda_o} = \sqrt{\frac{T'_c}{T'}}$$

il en résulte

$$\frac{l_1}{l} = \sqrt{\frac{T'_c}{T'}}$$

et si l'on remarque que l est la valeur que prend l_1 au point critique, on a l'énoncé suivant :

Pour des périodes correspondantes, les longueurs des chemins tourbillonnaires du second régime sont aussi correspondantes, quels que soient le liquide et le tube.

Nous retrouverons encore une loi tout à fait analogue dans l'étude de l'écoulement uniforme.

CONCLUSIONS

1° Conclusions relatives aux lois du mouvement des liquides.

A. — Pour le mouvement oscillatoire dans un tube en U.

On sait que le mouvement d'une colonne de liquide dans un tube en U peut être soit apériodique, soit périodique, selon la longueur l du liquide.

J'ai trouvé que :

1° Le mouvement périodique peut se faire suivant deux régimes.

Le premier régime se produit pour des amortissements $\frac{a_1}{a_3}$ supérieurs à $e = 2,72$, quels que soient le tube et le liquide, ce qui correspond à des périodes

$$T^v > \frac{1}{4} \frac{\nu}{\eta} r^2.$$

L'amortissement γ est indépendant de l'amplitude.

LOI DE L'AMORTISSEMENT DU PREMIER RÉGIME :

$\log \frac{a_1}{a_3}$ est proportionnel

à la période,

à l'inverse du carré du diamètre.

Le deuxième régime se produit pour des valeurs de $\frac{a_1}{a_3}$ inférieures à $e = 2,72$, c'est-à-dire pour des périodes

$$T^v < \frac{1}{4} \frac{\nu}{\eta} r^2.$$

L'amortissement γ est une fonction parabolique de l'amplitude

$$\frac{a_1}{a_3} = \left(\frac{a_1}{a_3} \right)_o \left(1 + \frac{0,0147}{r \ell} a_1^2 \right) \quad 0,0147 \text{ à } 15^\circ.$$

LOI DE L'AMORTISSEMENT DU DEUXIÈME RÉGIME :

$\left[\log \left(\frac{a_1}{a_3} \right)_o \right]^2$ est proportionnel¹

à la période,

à l'inverse du carré du rayon.

2° Ces deux régimes doivent être considérés comme admettant le même coefficient de frottement.

Dans le premier régime, le mouvement du liquide est linéaire.

Dans le deuxième régime, le mouvement du liquide est tourbillonnaire.

3° Le coefficient de frottement f_1 mis en évidence par cette étude, et cela sans aucune hypothèse, est en relation simple $f_1 = 8\pi\eta$ avec le coefficient η que l'on mesure par la méthode de Poiseuille.

4° Le point critique ou de passage de l'un des régimes à l'autre est défini par les lois suivantes :

a) *Loi de l'amortissement critique.* — Pour tous les tubes et tous les liquides, on a : $\log A_c = \log e$;

b) *Loi de la période critique.* — $T_c = \frac{1}{4} \frac{\mu}{\eta} r^2$ elle est :

1° Proportionnelle à r^2 ;

2° Proportionnelle à $\frac{\mu}{\eta}$.

5° Les équations caractéristiques des deux régimes peuvent s'écrire :

$$\frac{\log A}{\log e} = \frac{T}{T_c} \qquad \frac{\log^2 A_o}{\log^2 e} = \frac{T}{T_c}$$

D'où :

LOI DES ÉTATS CORRESPONDANTS.

Pour des périodes correspondantes, l'amortissement est le même, quels que soient le tube et le liquide.

6° *Loi de l'apériodicité.* — La longueur apériodique minimum L est donnée par

$$L = \frac{g}{8} \frac{\mu^2}{\eta^2} r^4 \qquad g = 984 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

Elle est proportionnelle à la quatrième puissance du rayon.

Elle est proportionnelle au carré du rapport $\frac{\mu}{\eta}$

Elle est proportionnelle au carré de la période critique.

Si d'ailleurs l_c est la longueur correspondant à la période critique, on établit facilement

$$L = l_c (1 + 4 \pi^2).$$

B. — Comparaison avec les résultats fournis par d'autres méthodes.

L'existence de deux régimes a été mise en évidence :

Dans la méthode d'écoulement uniforme à travers les tubes cylindriques.

Dans la méthode d'entraînement d'un liquide par un cylindre tournant autour d'un autre de même axe.

J'ai montré que le premier régime d'oscillation correspond au premier régime ou régime de Poiseuille observé dans ces deux méthodes.

Que le deuxième régime d'oscillation correspond au deuxième régime observé dans ces deux méthodes et sur lesquels je reviens plus loin.

Mais l'étude du mouvement oscillatoire est plus complète que les deux autres méthodes, puisque j'y ai trouvé la relation qui existe entre les deux régimes et le coefficient de frottement.

Enfin je pense que le deuxième régime d'oscillation est l'analogue du régime ordinairement employé dans la méthode du disque oscillant de Coulomb.

Je reviendrai d'ailleurs, dans la deuxième partie de ce travail, sur une étude plus complète des deux régimes observés dans le cas de l'écoulement continu.

MESURE DU COEFFICIENT DE FROTTEMENT PAR LA MÉTHODE D'OSCILLATION D'UNE COLONNE LIQUIDE.

Les deux régimes de cette méthode permettent la mesure du coefficient de frottement du liquide :

Premier régime.

$$\eta = \frac{\mu \cdot r^2 \log A}{4 T' \log e}$$

Deuxième régime.

$$\eta = \frac{\mu \cdot r^2 \log^2 A}{4 T' \log^2 e}$$

à condition (comme dans la méthode de Poiseuille) de se tenir à une distance suffisante du point critique.

Je ferai observer que dans aucune des méthodes indiquées jusqu'ici pour la mesure de η , on n'a montré la possibilité de l'emploi des deux régimes pour cette détermination.

En principe, on peut même employer à la mesure η la recherche de la longueur aperiodique minimum L (voir plus haut).

Note sur la mesure du rayon des tubes en U. — Chaque tube était d'abord soumis à l'opération suivante : une colonne de mercure occupant une longueur un peu supérieure à celle de la courbure, on mesure sa longueur l_1 puis on mesure les longueurs l_2 l_3 qu'elle occupe dans la partie moyenne de chacune des branches. Lorsque ces longueurs présentent des différences trop grandes, on rejette le tube.

Exemple. = Pour le tube $r = 0,03368$ on trouve $l_1 = 22^{\text{cm}} 6$
 $l_2 = 22,3$ $l_3 = 23,3$.

La moyenne de ces trois nombres est 22,73.

La valeur moyenne de la section πr^2 ne diffère alors des valeurs extrêmes que d'environ 1/40. (On ne trouve pas souvent mieux dans les tubes ordinaires.) J'ai toujours employé des tubes satisfaisant au moins à cette condition.

Je déterminais alors le rayon moyen par pesée d'une colonne de mercure de 60 à 70 centimètres de longueur.

DEUXIÈME PARTIE

Étude de l'écoulement uniforme d'un liquide dans un tube cylindrique.

CHAPITRE I

REVISION DE L'EXISTENCE DE DEUX REGIMES

LOI DU POINT CRITIQUE DE REYNOLDS

J'avais entrepris, il y a plusieurs années, une nouvelle étude de ce phénomène, espérant découvrir les lois du deuxième régime d'écoulement.

Je n'avais pu obtenir rien de net.

Mais la simplicité et la généralité des résultats que j'ai obtenus depuis avec la méthode d'oscillation m'ont mis sur la trace d'une nouvelle interprétation.

I. — Résumé de ce que l'on sait sur l'écoulement uniforme dans un tube. — Dans le cas des tubes très étroits et des faibles vitesses, Poiseuille a montré que l'on a :

$$\eta = \frac{\pi r^4 g H_1 \mu}{8/D}$$

H charge constante (exprimée en centimètres du liquide) absorbée par les frottements.

μ masse spécifique du liquide.

l longueur, r rayon du tube en centimètres.

D débit par seconde en centimètres cubes.

Mais cette formule ne se vérifie plus pour les tubes non capillaires et même pour les tubes capillaires sous des pressions élevées, comme l'a montré Poiseuille : c'est-à-dire dans les deux cas pour les grandes vitesses. Il faut, dans ce cas, introduire dans la formule un terme correctif dont la valeur devient négligeable pour les très faibles vitesses. Plusieurs physiciens ont cherché à déterminer théoriquement ce terme correctif : le meilleur résultat est, certes, celui obtenu par M. Couette. J'ai cherché, de mon côté, à déterminer ce terme uniquement par l'expérience.

Quant au deuxième régime, il est assez mal connu au point de vue quantitatif. M. Reynolds en Angleterre, M. Couette en France ont, après beaucoup d'autres (voir l'historique), donné des formules pour représenter ce deuxième régime dans le cas de l'eau; mais elles ne commencent à donner de bons résultats qu'à partir de vitesses notablement supérieures à la vitesse critique. Quant au point critique, passage du premier au deuxième régime, il a été assez nettement défini par Reynolds, qui a conclu de ses expériences que la vitesse critique est donnée par

$$\frac{\rho r^3 V_c}{\eta} = 1.000.$$

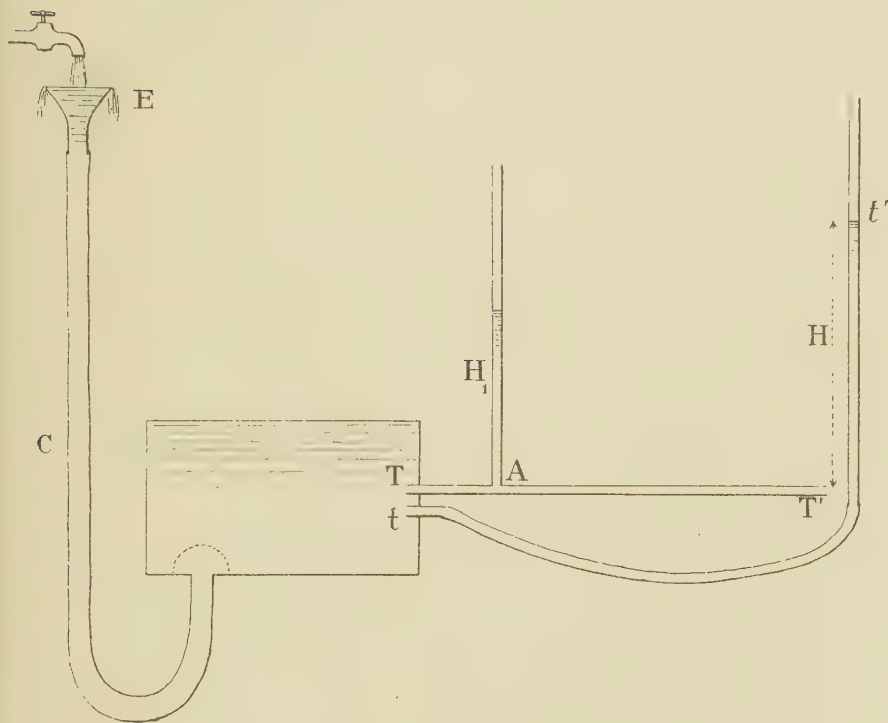
Lorsque j'ai commencé ce travail, j'avais surtout en vue l'étude du deuxième régime; cependant j'ai cherché également à utiliser les résultats obtenus pour le premier régime en y joignant quelques expériences de Poiseuille et de M. Couette.

II. — **Appareil employé.** — L'écoulement se produit par le tube de verre horizontal TT' dont le rayon a été déterminé par jaugeage au mercure.

Il est fixé dans le goulot d'un flacon d'une dizaine de litres complètement rempli d'eau.

Celle-ci y arrive par le caoutchouc C muni d'un entonnoir E dans lequel arrive l'eau du robinet de distribution réglé de façon

que cette eau passe constamment par-dessus le bord de l'entonnoir. L'eau s'élève dans le tube vertical tt' où son niveau t' reste parfaitement constant, grâce au trop-plein E. De sorte que



pour obtenir la valeur exacte de la charge, il suffit de mesurer la distance de l'axe du tube d'écoulement en T' au niveau t' de l'eau dans le manomètre. Le tube t' se trouvait d'ailleurs dans le voisinage de l'extrémité T' du tube d'écoulement. Les faibles charges étaient mesurées au cathétomètre. Les autres, qui ont été poussées jusqu'à plus de 3 mètres, ont été mesurées sur une règle graduée en millimètres disposée le long du tube t' .

Dans quelques expériences, j'ai déterminé aussi la pression H_1 en un point A du tube $T'T'$ pour différentes valeurs de la charge H . Pour cela une très petite ouverture A avait été pratiquée dans le tube $T'T'$, au-dessus de laquelle se trouvait installé

un tube vertical par l'intermédiaire d'un tube à trois voies fixé en A.

On mesure le débit en recevant l'eau dans un vase taré d'avance et que l'on pèse ensuite. L'écoulement dure toujours plusieurs minutes qui sont notées sur un chronomètre à arrêt.

III. — Résultats de mes expériences.

Tube T₁.

La petite ouverture A est à 30,1 centimètres de l'entrée T.

Dans cette partie du tube une colonne de mercure de 29^{cm}5 pèse 11^{gr}081, d'où $r = 0,09389$.

Dans l'autre partie AT' qui a 69^{cm}2 une colonne de mercure de 68^{cm}2 pèse 25^{gr}406, d'où $r = 0,0935$.

Ce qui fait, pour le rayon moyen du tube entier : $r = 0,09362$.

	H	H ₁	D	$\frac{H_1}{D}$	$\frac{H}{D}$
(1)	180,95	115,95	3,617	32,05	
	160,85	101,60	3,522	28,86	
	140,85	89,65	3,240	27,65	43,47
	121,05	77,95	2,843	27,42	42,58
	101,15	65,95	2,422	27,22	41,76
	81,25	53,80	1,979	27,18	41,06
	61,50	41,41	1,522	27,18	40,41
	41,84	28,60	1,050	27,21	39,85
	24,20	16,77	0,617	27,18	39,20

(1) La veine liquide se trouble, ce qui annonce le voisinage du point critique.

H pression à l'entrée du tube.

H₁ pression au point A situé à 69^{cm}2 de la sortie.

D débit en centimètres cubes par seconde.

Toutes les hauteurs HH₁ sont corrigées de l'ascension due à la capillarité dans le tube manométrique.

Tube T_2 ; longueur : $100^{\text{cm}}3$.

La petite ouverture A est à 30 centimètres de l'entrée.

Sur une longueur de $68^{\text{cm}}7$, une colonne de mercure placée à une extrémité du tube pèse $64^{\text{gr}}400$, d'où $r = 0,1483$.

La même colonne, placée à l'autre extrémité du tube, a la même longueur.

	h	h_1	D	$\frac{H_1}{D}$	$\frac{H}{D}$
	228,3	143,4	12,42	11,55	
	199,6	125,8	11,57	10,87	
	177,7	112,5	10,77	10,45	
	161	102,1	10,15	10,06	
	147	93,3	9,71	9,61	
	126,9	80,7	8,78	9,19	
	110,2	70,2	8,25	8,51	
	95,6	60,9	7,58	8,03	
	80,5	51,6	6,88	7,50	
(1) {	65,8	41,2	6,40	6,44	
	52	30,8	6,09	5,06	
	44,5	26,31	5,60	4,70	
	37,05	22,22	4,981	4,45	7,44
	29,33	18,20	4,072	4,47	7,20
$t = 15^\circ$	23,33	14,81	3,331	4,45	7,00
	14,48	9,67	2,17	4,45	6,67

(1) Région critique.

Tube T_3 ; longueur : $101^{\text{cm}}1$.

L'ouverture A est à $29^{\text{cm}}8$ de l'entrée.

Sur la portion TA une colonne de mercure de $29^{\text{cm}}1$ pèse $52^{\text{gr}}867$, d'où $r = 0^{\text{cm}}2065$.

Sur la portion AT' une colonne de mercure de $70^{\text{cm}}4$ pèse $135^{\text{gr}}13$, d'où $r = 0^{\text{cm}}21225$.

Donc le tube entier a un rayon moyen de $0^{\text{cm}}21027$.

	H	H ₁	D	$\frac{H_1}{D}$	$\frac{H}{D}$
	324,5	185,2	36,97	5,006	8,78
	305,4	174,25	35,63	4,89	8,57
	286,3	163,50	34,37	4,757	8,33
	267	152,75	33,26	4,592	8,03
	247,45	141,75	31,76	4,46	7,69
$t = 14^{\circ}3$	228,2	130,85	30,36	4,31	7,52
	209	120,10	28,93	4,15	7,225
	189,8	109,25	27,44	3,98	6,92
	170,5	98,40	25,76	3,82	6,62
	151,4	87,60	24,11	3,63	6,28
	132,1	76,70	22,26	3,45	5,93
	113,2	66	20,50	3,22	5,52
	93,85	55,05	18,46	2,98	5,08
	75,1	44,25	16,39	2,70	4,58
	56,4	33,45	13,87	2,41	4,07
(1) {	37,55	22,4	11,24	1,991	3,34
	30,35	18	10,24	1,758	2,96
	24,60	13,85	9,50	1,458	2,59
	13,35	7,55	6,669	1,132	2
$t = 15^{\circ}3$	8,35	5,10	4,507	1,131	1,852
	4,88	3,16	2,785	1,132	1,752

(1) Région critique.

Tube T₃.

Longueur : 202 centimètres obtenue en ajoutant au précédent un tube dans lequel une colonne de 100^{cm}3 pèse 194^{gr}82; son rayon est donc 0^{cm}2135, ce qui fait pour le tube entier le rayon moyen : 0,2128.

H	H ₁	D	$\frac{H_1}{D}$	$\frac{H}{D}$
309,6	237,6	25,73	9,23	
289,9	222,7	24,83		
270,25	207,9	23,83		

	H	H ₁	D	$\frac{H_1}{D}$	$\frac{H}{D}$
	250,9	193,2	22,79	8,47	
	231,4	178,4	21,82	8,18	
	212	163,55	20,72	7,89	
	192,35	148,55	19,65	7,56	
	173	133,65	18,54	7,21	
	153,7	118,95	17,34	6,86	
	134,1	103,9	16,15	6,43	
	114,8	89,1	14,83	6,01	
	93,4	72,35	13,24	5,46	
(1)	75,55	57,35	11,50	4,99	
	54	42,05	9,76	4,31	
	38	28,07	8,82	3,186	
	31,2	22,95	8,03	2,858	
	22,40	17,15	6,475	2,64	3,459
	19,60	15,04	5,751	2,62	3,409
$t = 14^{\circ}3$	13,88	11,06	4,200	2,63	3,280
	9,11	7,52	2,851	2,63	3,190

(1) Région critique.

Les autres tubes que j'ai employés se rapportent ou bien uniquement au premier régime, ou bien uniquement au deuxième; ils seront cités lorsque nous nous occuperons spécialement de chacun de ces régimes.

IV. — Représentation graphique de ces résultats. — Si on représente graphiquement ces résultats en portant D en abscisses et $\frac{H_1}{D}$ en ordonnées, on obtient naturellement des courbes tout à fait analogues à celles obtenues par M. Couette.

Remarquons que par l'emploi de la portion AT' du tube qui suit l'ouverture A, la perturbation que l'on sait exister à l'origine du tube se trouve éliminée.

On voit alors que pendant le premier régime $\frac{H_1}{D}$ est constant.

Donc : quel que soit le rayon du tube, pourvu que l'on élimine la perturbation à l'entrée, il obéit toujours à la loi de Poiseuille pendant le premier régime jusqu'à une petite distance du point critique.

Si d'ailleurs on calcule η par la formule de Poiseuille :

$$\eta = \frac{\pi r^4 g \rho l_1}{8 l D} \quad l_1 = \text{longueur AT}^v$$

on obtient pour le tube T₁ $\eta = 0,0115$ à $15^{\circ}2$

T₂ $\eta = 0,0117$ à 15° .

pour le tube T₃ $\eta = 0,0122$ à 15°

T₃ $\eta = 0,0119$ à $14^{\circ}3$

Le deuxième régime est représenté par une courbe de forme parabolique que nous discuterons plus loin.

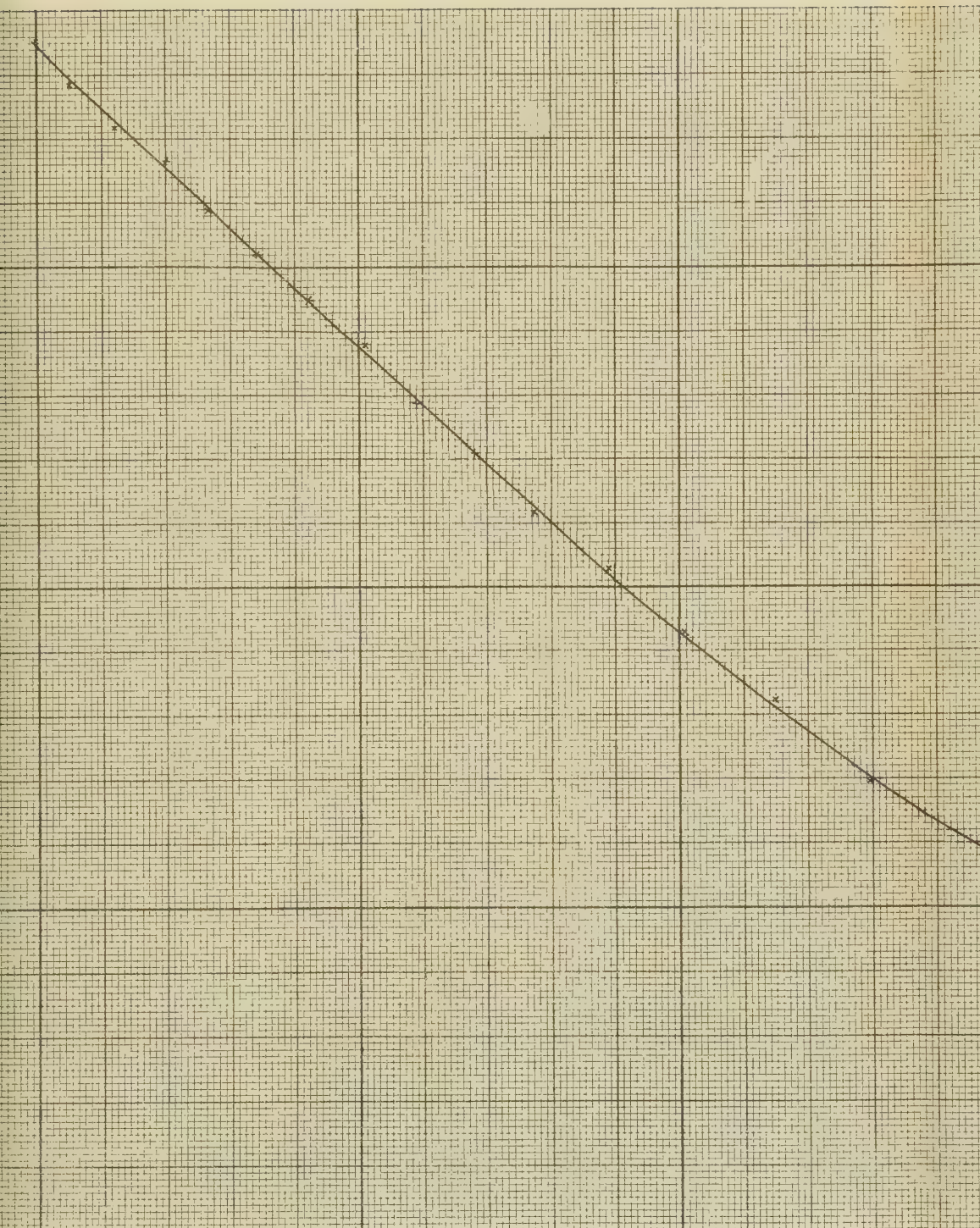
V. — **Point critique.** — Il est tout naturel de définir *algébriquement* le point critique comme étant l'intersection de la ligne horizontale qui représente le premier régime avec la courbe représentant le deuxième. On relève alors sur le graphique les valeurs du débit critique D_c d'où on calcule la vitesse critique V_c.

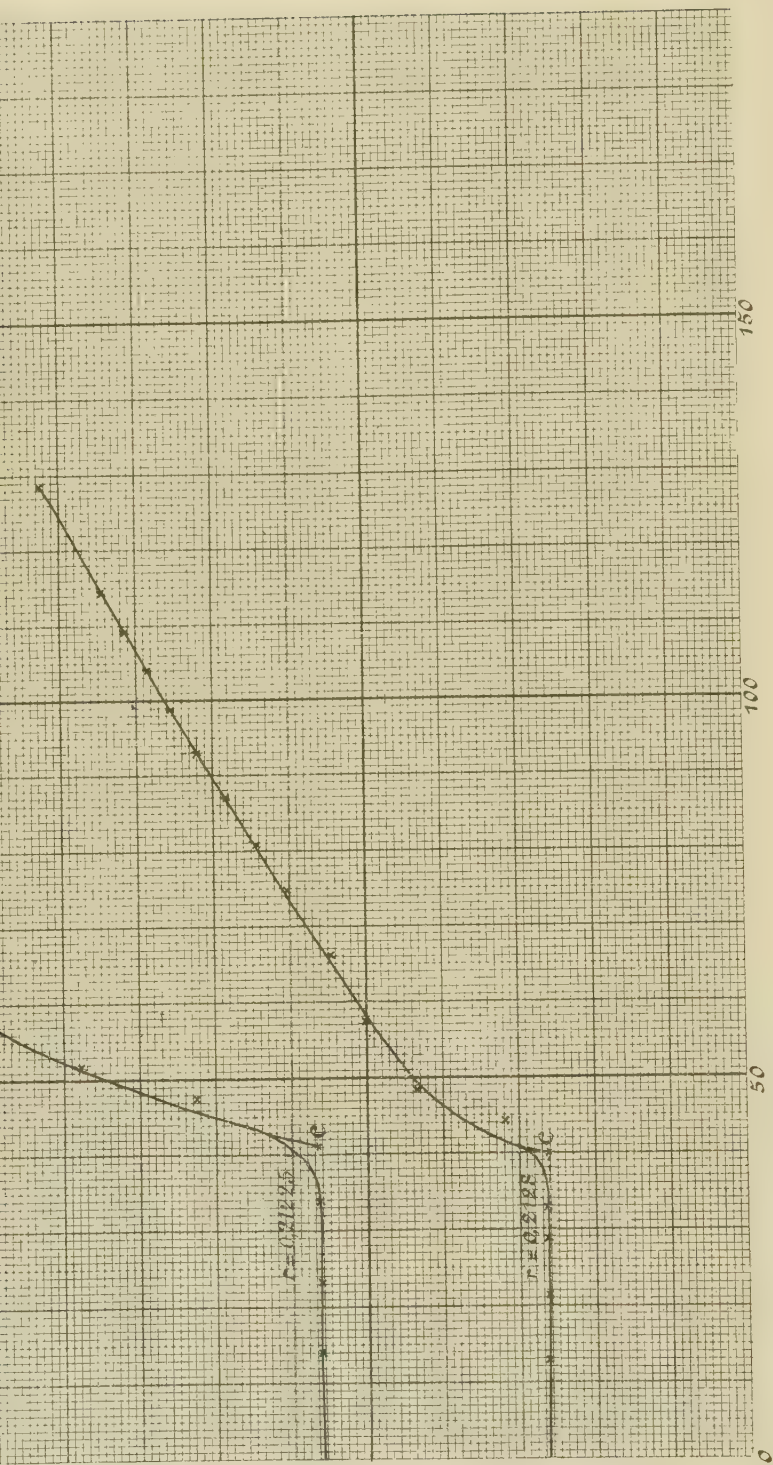
Tube	D _c	V _c	η	$\frac{\mu r V_c}{\eta}$
$r = 0,0936$	3,45	126	0,0115	1.020
$r = 0,1483$	5,82	83,2	0,0117	1.050
$r = 0,21225$	8,2	58	0,0117	1.040
$r = 0,2128$	8	57	0,0118	1.020

Ces résultats sont donc bien d'accord avec ceux de Reynolds, qui a déduit de ses expériences :

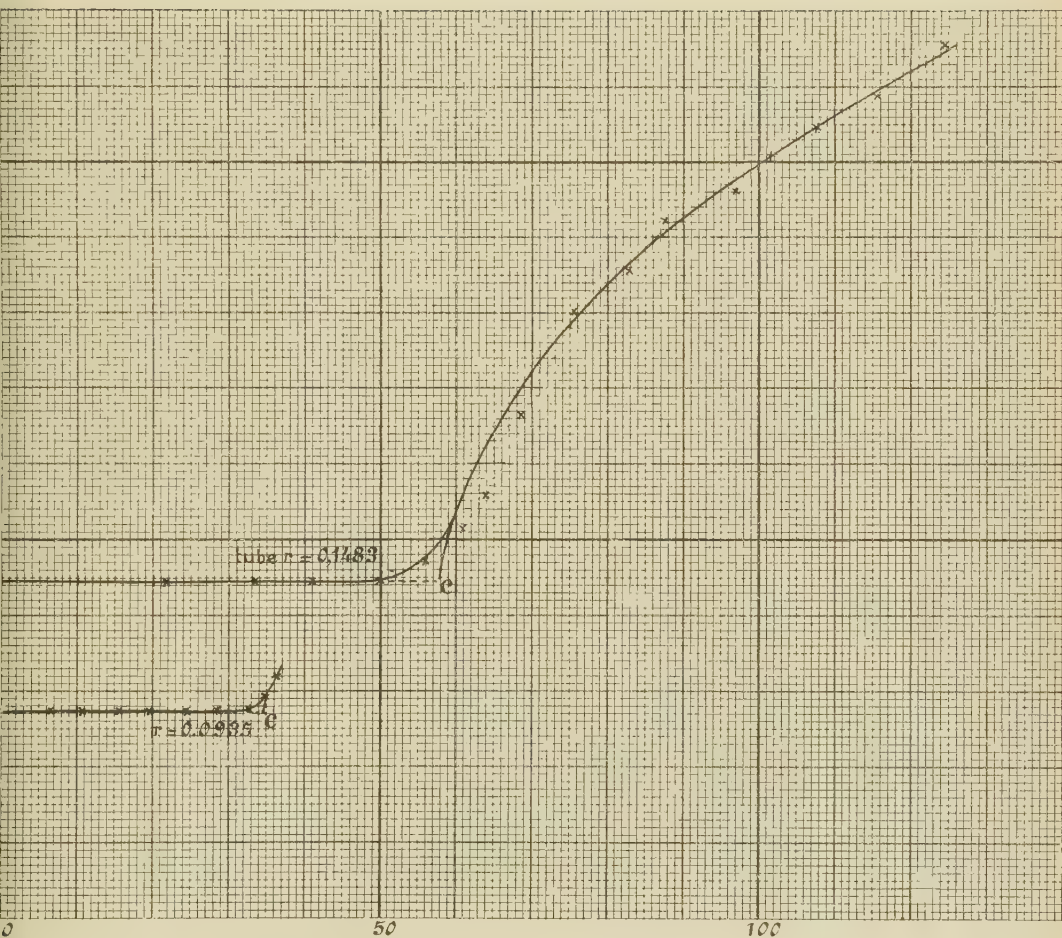
$$(1) \quad \frac{\mu r V_c}{\eta} = 1.000$$

Si j'ai tenu à vérifier la relation de Reynolds, c'est que j'aurai besoin de cette formule pour calculer la vitesse critique dans l'étude du deuxième régime.





tube T_3	0,21225	$\left\{ \begin{array}{l} \text{abscisse} \\ \text{ordonnée} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 5D \\ 50 \frac{H_1}{D} \end{array} \right.$
tube $T_{3'}$	0,2128	$\left\{ \begin{array}{l} \text{abscisse} \\ \text{ordonnée} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 5D \\ 10 \frac{H_1}{D} \end{array} \right.$



$\text{tube } r = 0,0935$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{abscisse } 10 D \\ \text{ordonnée } \frac{H_1}{D} \end{array} \right.$
 T_1
 $\text{tube } r = 0,1483$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{abscisse } 10 D \\ \text{ordonnée } 10 \frac{H_1}{D} \end{array} \right.$
 T_2

CHAPITRE II

 ETUDE DU PREMIER REGIME SUR LE TUBE ENTIER
 CORRECTION A L'ENTREE

I. — Résultats de mes expériences sur le premier régime. —

Il est donc établi que la loi de Poiseuille s'applique à une portion quelconque du tube ne comprenant pas l'entrée; dans ce cas, le rapport $\frac{H_1}{D}$ est constant dans le premier régime.

Mais si on considère le tube entier, il n'en est plus de même; le rapport $\frac{H}{D}$ varie pendant le premier régime.

Au lieu de chercher théoriquement la raison comme d'autres physiciens, et en particulier M. Couette, je vais simplement m'en remettre à l'expérience.

Tube T ₁		1 ^{er} régime	
rayon moyen 0,09362		longueur 99 ^{cm} 3	$t = 15^{\circ}5$
H	D	$\frac{H}{D}$ observé	calculé
121,05	2,843	42,58	42,45
101,15	2,422	41,76	41,79
81,25	1,979	41,06	41,11
61,50	1,522	40,41	40,41
41,84	1,050	39,84	39,71
24,20	0,617	39,19	39,04

La dernière colonne de ce tableau¹ montre que les valeurs de $\frac{H}{D}$ sont bien représentées par

$$\frac{H}{D} = 38,08 + 1,55 D$$

On sait que la formule de Poiseuille n'est applicable, même aux tubes capillaires entiers, que pour D très petit; il est probable qu'il en est de même ici. Or, lorsque D tend vers 0, $\frac{H}{D}$ tend vers $38,08 = \left(\frac{H}{D}\right)_0$

On doit donc avoir

$$\tau_i = \frac{\pi r^4 g \mu}{8l} \times 38,08$$

ce qui donne $\tau_i = 0,01138$ très bon à $15^\circ 5$.

En d'autres termes, l'une quelconque des expériences de ce tableau permet de calculer τ_i par la formule

$$\tau_i = \frac{\pi r^4 g \mu}{8lD} (H - 1,55 D^2).$$

Donc le terme

$$\varepsilon = 1,55 D^2$$

représente la perte de charge à l'origine du tube.

Sans nous occuper de sa signification physique, voyons ce que donne l'expérience avec d'autres tubes.

Tube T₂.

$$l = 100 \text{ cm}^2$$

$$r = 0 \text{ cm } 1483$$

$$t = 15^\circ.$$

H	D	$\frac{H}{D}$	calculé
37,05	4,98	7,44	7,45
29,33	4,07	7,21	7,20
23,33	3,33	7,00	7,00
14,48	2,17	6,67	6,70

La dernière colonne montre que $\frac{H}{D}$ est bien représenté par

$$\frac{H}{D} = 6,12 + 0,266 D.$$

Si on calcule η par

$$\eta = \frac{\pi r^4 g \mu}{8l} \times 6,12 \quad \text{on a} \quad \eta = 0,01145 \text{ à } 15^\circ,$$

la perte de charge à l'entrée est donc ici :

$$\varepsilon = 0,266 D^2.$$

Tube T₃.

$$l = 101 \text{ cm} \quad r = 0^{\text{cm}}21027 \quad t = 14^\circ2.$$

H	D	$\frac{H}{D}$	calculé
13,35	6,669	2,002	2,010
8,35	4,507	1,852	1,855
4,88	2,785	1,754	1,739

Comme le montre la dernière colonne, on a

$$\frac{H}{D} = 1,55 + 0,0678 D.$$

On doit donc avoir

$$\eta = \frac{\pi r^4 g \mu}{8l} \times 1,55 \quad \text{ce qui donne} \quad \eta = 0,0117 \text{ à } 14^\circ2.$$

La perte de charge à l'entrée est donc :

$$\varepsilon = 0,0678 D^2.$$

Tube T₃.

$$l = 202 \text{ cm} \quad r = 0^{\text{cm}}2128 \quad t = 14^\circ2.$$

H	D	$\frac{H}{D}$	calculé
22,40	6,475	3,459	3,453
19,60	5,75	3,409	3,405
13,88	4,20	3,281	3,290
9,40	2,85	3,19	3,200

La dernière colonne montre que l'on a

$$\frac{H}{D} = 3,02 + 0,067 D.$$

On doit donc avoir

$$\eta = \frac{\pi r^4 g \rho}{8l} \times 3,02 \quad \text{ce qui donne} \quad \eta = 0,0118 \text{ à } 14^\circ.$$

La perte de charge à l'entrée est donc :

$$\varepsilon = 0,067 D^2.$$

Tube T₄.

$$l = 40^{\text{cm}} \quad r = 0^{\text{cm}} 1470 \quad t = 17^\circ.$$

Une colonne de mercure de 39^{cm} 8 y pèse 36^{gr} 642.

H	D	$\frac{H}{D}$
14,43	4,03	3,58
8,72	2,705	3,215

Ces deux expériences donnent (en admettant la forme d'équation $A + BD$) :

$$\frac{H}{D} = 2,462 + 0,2776 D.$$

On doit avoir alors

$$\eta = \frac{\pi r^4 g \rho}{8l} \times 2,462 \quad \text{ce qui donne} \quad \eta = 0,01093 \text{ à } 17^\circ.$$

La perte de charge est donc :

$$\varepsilon = 0,2776 D^2.$$

Tube T₅ $l = 68^{\text{cm}}.$

Une colonne de mercure de 66^{cm} 7 pèse 138^{gr} 806 d'où $r = 0,2211$ pour

H = 8,30	D = 6,69	$\frac{H}{D} = 1,241$	$t = 15^\circ.$
----------	----------	-----------------------	-----------------

Je vais utiliser cette unique expérience de la façon suivante :
Je prends à 15°

$$\eta = 0,0115.$$

Dans la formule

$$\frac{H}{D} = A + BD,$$

je dois avoir

$$A = \frac{8\eta l}{\pi r^4 g \gamma}, \quad \text{ce qui donne} \quad A = 0,85,$$

par suite :

$$BD = 1,241 - 0,85 = 0,391.$$

D'où

$$B = 0,0585.$$

D'où

$$\varepsilon = BD^2 = 0,0585 D^2.$$

Or il est visible, d'après les résultats précédents, que le coefficient B (indépendant de la longueur) diminue quand r augmente; donc pour le rayon 0,2211 de ce tube, il doit bien être un peu inférieur à la valeur 0,067 qu'il a pour le tube 0,2128.

Conclusion. — Je crois pouvoir conclure de ces résultats que l'équation du premier régime est de la forme

$$\frac{H}{D} = A + BD,$$

et que, par suite, la perte de charge à l'entrée est

$$\varepsilon = BD^2.$$

La comparaison des tubes T_2 et T_4 , qui ont presque même rayon, d'une part, et T_3 et T'_3 , d'autre part, montre que le coefficient B est indépendant de la longueur du tube et diminue rapidement quand le rayon augmente.

Mais avant de pousser plus loin la discussion, voyons ce que donnent les expériences analogues effectuées, d'une part par Poiseuille, d'autre part par M. Couette.

II. — Expériences de Poiseuille (dites de la deuxième série).

— Dans ses expériences, Poiseuille emploie un tube dont il réduit progressivement la longueur; il en résulte que, en général, le rayon du tube varie un peu d'un tronçon à l'autre.

Pour cette raison, j'ai fait le calcul des expériences de Poiseuille d'une façon un peu différente.

Si d'après mes expériences on admet la formule

$$\frac{H}{D} = A + BD$$

dans laquelle on a

$$\eta = \frac{\pi r^4 g \mu}{8l} A$$

on peut l'écrire

$$\frac{\pi r^4 g \mu}{8l} \frac{H}{D} = \eta + B \frac{\pi r^4 g \mu}{8l} D.$$

Je calcule alors, pour chaque tronçon d'un même tube, les valeurs de

$$y = \frac{\pi r^4 g \mu}{8l} \frac{H}{D} \quad x = \frac{D}{8l}$$

Les pressions H sont exprimées en centimètres d'eau à 10° , les temps T en secondes, les débits D en centimètres cubes par seconde.

Pour chacun des tubes, Poiseuille donne le diamètre minimum d_1 et le diamètre maximum d_2 à chaque extrémité et il calcule le diamètre moyen par

$$\sqrt{d_1 d_2}.$$

Tube F de Poiseuille.

La capacité de l'ampoule était $17^{\text{cm}}566$; T est la durée en secondes de l'écoulement de $17^{\text{cm}}566$, D est le débit à la température 10° . Chacun des tronçons de ce tube est désigné par un indice.

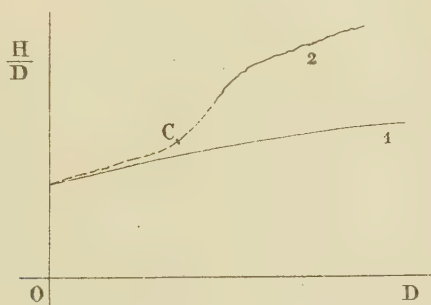
Tube F₅.

 $l = 1^{\text{cm}}075$ rayon moyen 0,03267.

H	T	D	y	x	η calculé
7,429	111	0,1540	0,01966	0,01793	0,01333
8,389	103	0,1705	0,02008	0,01983	0,01310
16,289	63	0,2788	0,02390	0,03241	0,01250
32,94	39	0,4504	0,03000	0,05240	
65,35	25	0,7026	0,03794	0,08170	
130,67	16	1,0980	0,04895	0,12762	
198,53	13	1,3510			
260,64	10,75	1,6340			
514,66	7,5	2,342			
1.045,66	5	3,513			

 Moyenne : $\eta = 0,01321$.

Remarque. — A propos de ce tube, il y a lieu de faire de suite une remarque intéressante. Si on porte $\frac{H}{D}$ en ordonnées et D en



abscisses, on obtient avec le tube F₅ la courbe (1) en trait plein figurée ci-contre.

Or pour ce tube, d'après la loi de Reynolds, le débit critique est $D_c = 1,35$ et nous savons qu'une telle courbe doit changer brusquement d'allure au point critique C et présenter une forme telle que la courbe (2) de la figure ci-contre. Il est certain, d'après cela, que dans ce tube très court le deuxième régime ne

peut pas prendre naissance; le débit y reste trop grand sous les hautes pressions. En somme, ce qui s'y passe paraît irrégulier et il est probable que seules les expériences faites sous de très faibles pressions peuvent être considérées comme appartenant au premier régime; peut-être les autres tendent vers l'écoulement par ajetage. Je signale cette particularité sans chercher à l'approfondir. Continuons l'examen des tubes F.

Tube F₄.

$l = 2,6$	même rayon que le précédent				$D_c = 1,35.$
H	T	D	x	y	η calculé
8,236	191	0,0920	0,00442	0,01508	0,01349
16,34	104	0,1689	0,00813	0,01631	0,01345
32,894	59,75	0,2940	0,01414	0,01889	0,01389
66,16	35	0,5019	0,02414	0,02208	0,01357
132,12	21,75	0,8076	0,03883	0,02750	0,01369
198,50	16,75	1,0487	0,05041		
261,46	13,5	1,3012	0,06255		
520,51	9	1,952			
1.045,8	6	2,928			

Moyenne : $\eta = 0,01355.$

Ce tube présente encore la particularité du tube précédent, mais moins accentuée.

Tube F₃.

$l = 5,045$	rayon moyen 0,032635				$D_c = 1,35.$
H	T	D	x	y	η calculé
8,21	345	0,0509	0,001275	0,01393	0,01345
16,38	175	0,1008	0,002500	0,01407	0,01318
32,98	91	0,1930	0,004790	0,01480	0,01312
66,10	50	0,3513	0,008750	0,01627	0,01319
132,36	28	0,6273	0,015500	0,01827	0,01285
198,32	21,75	0,8076	0,020000	0,02106	0,01400
259,08	17,5	1,0080	0,025000	0,02226	0,01344
516,01	11	1,5970	0,039620		
1045,65	7	2,5090	0,062250		

Moyenne : $\eta = 0,01319.$

Tube F₂.

$l = 9,9725$		même rayon moyen		$D_c = 1,35.$	
H	T	D	x	y	η calculé
8,183	666	0,0262	0,000325	0,01360	0,01345
16,397	328	0,0536	0,000669	0,01337	0,01313
33,151	165	0,1065	0,001335	0,01362	0,01315
66,436	84,5	0,2080	0,002610	0,01393	0,01305
132,358	45	0,3904	0,004895	0,01480	0,01308
198,495	31	0,5667	0,007102	0,01535	0,01287
258,533	25	0,7026	0,008810	0,01610	0,01302
520,773	15	1,1710			
1.045,454	9	1,9520			

 Moyenne : $\eta = 0,01310.$

 Tube F₁.

$l = 20$ centimètres		même rayon que le précédent		$D_c = 1,35.$	
H	T	D	x	y	η calculé
8,34	1.295	0,01356	0,0000850	0,01336	0,01331
12,76	838	0,02096	0,0001312	0,01332	0,01325
16,371	657	0,02674	0,0001675	0,01335	0,01325
32,882	326	0,05388	0,0003363	0,01334	0,01320
66,129	162	0,10842	0,0006775	0,01334	0,01308
132,187	81,5	0,21553	0,0013500	0,01337	0,01293
198,176	56	0,31370	0,0019620	0,01380	0,01311
262,658	42	0,41820	0,0026620	0,01380	0,01293
561,027	22,5	0,78070	0,0048750	0,01465	0,01295
1.045,91	12,5	1,4053	0,0087880	0,01620	0,01311

 Moyenne : $\eta = 0,01311.$

Tube F.

$l = 38,3825$			r moyen 0,03261.		
H	T	D	x	y	η calculé
12,692	1.623	0,01082	0,000035	0,01325	0,01321
30,308	678	0,02591	0,000085	0,01325	0,01320
66,742	306	0,05740	0,000190	0,01320	0,01312
135,210	150	0,11710	0,000381	0,01313	0,01299
198,15	104	0,16890	0,000550	0,01330	0,01310
262,034	78	0,22520	0,000730	0,01320	0,01297
519,86	40,25	0,43641	0,001420	0,01350	0,01303
1.046,21	20	0,87829	0,002860	0,01360	0,01260

Moyenne : $\eta = 0,01308$.

Si on porte en ordonnées les valeurs de y et en abscisses les valeurs de x , on remarque que tous les points viennent se placer sensiblement sur une même droite dont l'équation est

$$\frac{\pi r^4 g_{\mu}}{8l} \frac{H}{D} = 0,01310 + 0,352 \frac{D}{8l}$$

Or le nombre 0,01310, c'est précisément la valeur de η trouvée par Poiseuille à 10°. D'ailleurs pour comparer cette équation avec chacune des expériences, j'ai calculé pour chacune la valeur de η donnée par

$$\eta = \frac{\pi r^4 g_{\mu}}{8l} \frac{H}{D} - 0,352 \frac{D}{8l}$$

Les valeurs de η ainsi obtenues sont inscrites dans la dernière colonne de chacun des tableaux.

On remarque (et ceci sera plus net encore sur les expériences qui suivent) que dans chacun des tableaux la valeur calculée de η est sensiblement constante (sauf quelques expériences qui paraissent défectueuses); on a donc bien, comme dans mes expériences :

$$\frac{H}{D} = A + BD$$

et la perte de charge à l'entrée est

$$\varepsilon = BD^2 = \frac{0,352}{\pi r^4 g \mu} D^2$$

Seul le tube F₄ donne une valeur moyenne de η 0,01355, certainement trop grande; il semble qu'il y ait une erreur sur la mesure du rayon. Nous reparlerons de ce fait après l'examen des autres expériences de Poiseuille.

Etude du tube A de Poiseuille.

Les pressions P sont exprimées en colonne de mercure à 10°; on a donc en colonne d'eau : H = 13,58 P. Je vais calculer comme précédemment les valeurs de y et x .

Tube A ₆		$l = 0,6775$		$r = 0,007085$		
P	T	D	x	y	η calculé	η_k
2,4753	3.828,7	0,003484	0,000643	0,01380	0,01356	0,01280
5,0001	1.923,75	0,006934	0,001280	0,01402	0,01348	0,01273
9,9343	994	0,013420	0,002480	0,01439	0,01353	0,01280
14,8618	682	0,019560	0,003610	0,01477	0,01351	0,01282
19,3010	337,75	0,024809	0,004580	0,01513	0,01355	0,01286
38,7887	291,50	0,045770	0,008440	0,01646	0,01354	0,01295
77,3790	165,75	0,080480	0,014850	0,01868	0,01353	0,01312

η_k est la valeur de η calculée en appliquant la correction de M. Couette.

Tube A ₅		$l = 0,955$		$r = 0,007085$		
P	T	D	x	y	η calculé	η_k
2,3638	5.570	0,002395	0,000314	0,01361	0,01350	0,01294
4,9185	2.699	0,004943	0,000647	0,01373	0,01350	0,01295
9,9221	1.360	0,009810	0,001284	0,01395	0,01350	0,01297
14,8623	918,5	0,014525	0,001901	0,01411	0,01345	0,01293
19,3315	718	0,018580	0,002432	0,01435	0,01351	0,01300
38,7737	381	0,035016	0,004583	0,01526	0,01363	0,01322
77,4620	207	0,064450	0,008436	0,01656	0,01361	0,01329

Tube A₄ $l = 1,575$ $r = 0,007085$

P	T	D	x	y	η calculé	η_h
2,4661	8.646	0,001543	0,0001224	0,01334	0,01330	0,01297
4,9591	4.355	0,003063	0,0002431	0,01352	0,01344	0,01311
9,8233	2.194	0,006080	0,0004825	0,01350	0,01333	0,01302
14,8233	1.455	0,009170	0,0007278	0,01350	0,01326	0,01294
19,4257	1.116	0,011954	0,0009487	0,01357	0,01326	0,01294
38,8000	571	0,023360	0,0018540	0,01387	0,01324	0,01293
77,5160	298	0,044770	0,0035530	0,01447	0,01326	0,01300

Tube A₃ $l = 2,555$ $r = 0,007085$

P	T	D	x	y	η calculé	η_h
38,7520	880	0,01516	0,000742	0,01318	0,01293	0,01274
77,4895	448	0,02978	0,001457	0,01342	0,01291	0,01275

Tube A₂ $l = 5,11$ $r = 0,00708$

P	T	D	x	y	η calculé
9,8404	6.921	0,001928	0,000048	0,01312	0,01310
14,832	4.594	0,002904	0,000074	0,01312	0,01309
19,342	3.515	0,003795	0,000093	0,01310	0,01307
38,744	1.757	0,07593	0,000186	0,01311	0,01305
77,481	878	0,015200	0,000371	0,01312	0,01301

Tube A₁ $l = 7,58$

Tube A $l = 10,05$

Pour ces deux tubes, les vitesses sont assez faibles pour que le terme correctif soit négligeable (1^{re} série de Poiseuille); ils donnent des valeurs de η toutes comprises entre 0,01302 et 0,01308.

La représentation graphique x en abscisses, y en ordonnées, donne sensiblement la droite

$$y = 0,01316 + 0,345 x,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\eta^4 g \mu}{8l} \frac{H}{D} = 0,01316 + 0,345 \frac{D}{8l}$$

la valeur moyenne de η de ces expériences est donc 0,01316.

J'ai inscrit dans l'avant-dernière colonne de chacun des tableaux ci-dessus les valeurs de η calculées pour chaque expérience par la formule ci-dessus, c'est-à-dire

$$\eta = \frac{\pi r^4 g \mu}{8l} \frac{H}{D} - 0,345 \frac{D}{8l}$$

et on voit (mieux encore que pour les tubes F) que dans chaque tableau la valeur de η calculée est bien constante, ce qui justifie la forme d'équation

$$\frac{H}{D} = A + BD$$

avec le même coefficient 0,345 pour chaque tube.

Les valeurs de η ainsi obtenues devraient être les mêmes pour tous les tronçons : on voit que pour les tubes A₆ A₅ A₄, elles sont un peu supérieures au nombre admis par Poiseuille (0,01309); pour le tube A₃ elles sont, au contraire, un peu inférieures. Je crois qu'il y a lieu d'admettre alors que ces écarts sont dus à des erreurs de mesure, probablement sur les rayons des tubes.

Mais voyons encore quelques expériences de Poiseuille.

Étude des tubes B de Poiseuille.

La capacité de l'ampoule était 6^{cm}4482.

Tube B ₅		$l = 0^{\text{cm}}39$		$r = 0^{\text{cm}}005675$	
P	T	D	x	y	η calculé
2,429	2.386	0,002702	0,000866	0,01248	0,01219
4,958	1.193	0,005405	0,001732	0,01275	0,01217
9,914	621	0,010384	0,003328	0,01327	0,01217
14,910	428	0,015066	0,004830	0,01376	0,01217
19,313	340	0,018965	0,006080	0,01415	0,01215
38,702	189	0,034117	0,010930	0,01576	0,01216
77,328	110	0,058620	0,018790	0,01833	0,01216

Tube B ₄		$l = 0,90$		$r = 0,0056725$	
P	T	D	x	y	η calculé
2,4756	5.543	0,001163	0,000161	0,01283	0,01278
4,9857	2.762	0,002335	0,000324	0,01289	0,01278
9,9214	1.400	0,004606	0,000640	0,01298	0,01277
14,9082	935	0,006896	0,000958	0,01303	0,01274
19,3194	728	0,008857	0,001230	0,01314	0,01275
38,7024	375	0,017195	0,002388	0,01356	0,01278
77,4540	199	0,032400	0,004500	0,01439	0,01290

Les tubes B₃ B₂ B₁ B, dont les longueurs varient de 2^{cm}3576 à 10^{cm}005, appartiennent à la première série des expériences de Poiseuille (correction négligeable) et donnent des valeurs de η toutes comprises entre 0,01295 et 0,01306.

La représentation de x et y (des tubes B₅ et B₄) conduit à la formule

$$\eta = \frac{\pi r^4 g \mu}{8l} \frac{H}{D} - 0,3296 \frac{D}{8l}$$

Les valeurs de η calculées par cette formule et inscrites dans les dernières colonnes montrent, comme précédemment, que pour un même tube la valeur de η obtenue est bien constante.

Mais à l'inverse de ce qui a lieu pour les tubes F et les premiers tubes A, la valeur de η obtenue est trop faible.

Je pense donc encore que la forme d'équation que je propose $\frac{H}{D} = A + BD$ est exacte et que les écarts constatés (les uns par défaut, les autres par excès) sont accidentels.

Sans le détailler, je citerai encore :

Tube C₅ de Poiseuille.

$$l = 0^{\text{cm}}6025 \quad r = 0^{\text{cm}}004275.$$

Le calcul de x et y donne une droite qui, pour la valeur constante de η calculée comme dans chacune des expériences ci-

dessus, donne 0,01230, valeur encore plus petite que la valeur admise : 0,01309.

En résumé, les valeurs de η que l'on calcule au moyen de

$$\eta = \frac{\pi r^4 g \rho}{8l} \frac{H}{D} - K \frac{D}{8l}$$

sont, avec les tubes de Poiseuille, tantôt supérieures, tantôt inférieures ou égales à la valeur admise 0,01309 à 10°. Mais pour chaque tube η calculé est constant, la formule $\frac{H}{D} = A + BD$ est donc exacte et j'estime que les écarts sont dus à des erreurs expérimentales.

III. — **Examen de quelques expériences prises dans la thèse de M. Couette.** — Nota. Les pressions P indiquées dans les tableaux suivants doivent, pour être évaluées en colonnes d'eau, être multipliées par M — m, différence entre les masses spécifiques du mercure et de l'eau (manomètre à deux liquides).

Tube K ₁		$l = 15,848$	$r = 0,04998$		
Temp ^{re}	P	D	$\frac{P}{D}$	η calculé	η_k
10,7	1,311	0,1854	7,069	0,01296	0,01277
10,7	8,194	0,9911	8,268	0,01290	0,01303
10,2	10,440	1,227	8,509	0,01289	0,01290
8,9	12,260	1,344	9,122	0,01350	0,01376
10,9	16,502	1,748	9,440	0,01294	0,01337
11,1	18,256	1,880	9,710	0,01304	0,01352
11,3	20,876	2,064	10,110	(1)	

(1) Expérience voisine du point critique.

Dans chaque série d'expériences, M. Couette opérait toujours simultanément sur deux tubes de même diamètre, de longueurs différentes, avec le même débit, dans le but d'éliminer par différence la perturbation à l'entrée.

Voici le deuxième tube de la même série :

Tube K ₁		$l = 5^{\text{cm}} 272$		$r = 0,04998$	
Temp ^{re}	P	D	$\frac{P}{D}$	η calculé	η_k
10,7	0,473	0,1854	2,551	0,01301	0,01246
10,7	3,730	0,9911	3,764	0,01294	0,01328
10,2	4,936	1,220	4,050	0,01270	0,01329
8,9	5,894	1,344	4,385	0,01344	0,01408
10,9	8,652	1,748	4,950	0,01310	0,01431
11,1	9,736	1,880	5,178	0,01319	0,01455
11,3	11,458	2,064	5,550		

Si on considère les trois expériences à 10°7, 10°7, 10°9 qui se rapportent sensiblement à la même température, on trouve qu'elles sont représentées par

$$1^{\text{er}} \text{ tube K}_1 \quad \frac{P}{D} = 6,79 + 1,52 D.$$

$$2^{\text{e}} \text{ tube K}'_1 \quad \frac{P}{D} = 2,27 + 1,52 D.$$

Essayons alors de calculer les valeurs de η au moyen de ces formules, c'est-à-dire par

$$\eta = \frac{\pi r^4 g \rho}{8l} 12,58 \left(\frac{P}{D} - 1,52 D \right)$$

on obtient les η calculés qui sont indiqués dans les avant-dernières colonnes. On voit que les expériences à 10°7 et 10°9 donnent une valeur moyenne $\eta = 0,01297$ qui est très voisine de celle de Poiseuille. De même la valeur moyenne 0,01348 obtenue à 8°9 est très voisine de celle de Poiseuille (seules les deux dernières expériences du dernier tableau donnent un peu fort).

Donc ici la perte de charge à l'extrémité est bien donnée par

$$\varepsilon = B D^2 = 1,52 \times 12,58 \times D^2$$

12,58 étant la différence des masses spécifiques du mercure et de l'eau.

Tube K₂ de M. Couette $l = 22,616$ $r = 0,09036$

N° d'expérience	P	D	$\frac{P}{D}$	η calculé	temp ^{re}
4	4,070	3,148	1,293	0,01190	13°2
2	4,911	3,628	1,354	0,01180	13°9
6	5,174	3,771	1,372	0,01180	13°5
7	2,410	2,037	1,183	0,01265	11°2
8	2,444	2,059	1,188	0,01265	11°4

Les trois premières expériences sont sur une droite : $y = \frac{P}{D}$
 $x = D$ ayant pour coefficient angulaire 0,146.

Calculons donc η pour chaque expérience au moyen de

$$\eta = \frac{\pi r^4 g \mu}{8l} 12,58 \left(\frac{P}{D} - 0,146 D \right)$$

Les valeurs obtenues sont indiquées dans l'avant-dernière colonne du tableau.

On voit qu'à 13°6 on obtient $\eta = 0,01185$, ce qui est parfaitement d'accord avec le nombre de Poiseuille; de même pour la valeur 0,01265 obtenue à 11°3.

La perte de charge à l'extrémité est donc représentée ici par

$$\varepsilon = BD^2 = 0,146 \times 12,58 D^2.$$

Expérience de M. Couette avec un tube de cuivre $r = 0,29691$

t	l	H	D	$\frac{H}{D}$	η_o	η calculé
17°3	132,93	5,347	8,45	0,633	0,01426	0,01076
15°5	132,93	3,847	6,225	0,6179	0,01393	0,01135
17°3	44,398	2,661	8,45	0,315	0,02125	0,01078

H en colonne d'eau.

Les deux expériences à 17°3 conduisent à écrire :

$$\eta = \frac{\pi r^4 g \mu}{8l} \frac{H}{D} - 0,44 \frac{D}{8l} = \eta_o - 0,44 \frac{D}{8l}$$

et cette formule appliquée à chacune des expériences donne, comme le montre la dernière colonne,

à 17°3	$\eta = 0,01077$	nombre de Poiseuille.
15°5	0,01135	id.

Donc, ici encore, le type de formule $\frac{H}{D} = A + BD$ s'accorde bien avec l'expérience; il y a même lieu de remarquer que, pour la dernière expérience, la valeur du terme correctif est à peu près égale à la valeur de η . La perte de charge à l'origine a donc ici pour expression

$$\varepsilon = BD^2 = \frac{0,44}{\pi r^4 g} D^2.$$

IV. — **Conclusions.** — Je pense que l'on peut conclure de l'ensemble des résultats précédents que la formule représentant le premier régime est, pour un tube de dimensions quelconques:

$$\eta = \frac{\pi r^4 g \mu}{8 l D} \left(H - \frac{K D^2}{\pi r^4 g} \right)$$

K étant un coefficient numérique indépendant de la longueur et qui ne dépend que du rayon.

La perte de charge à l'entrée est donc représentée par

$$\varepsilon = \frac{K D^2}{\pi r^4 g}$$

en colonne de liquide, ou bien en mettant en évidence le carré de la vitesse moyenne

$$V^2 = \frac{D^2}{\pi^2 r^4}$$

et posant

$$K\pi = K_1,$$

on a

$$\varepsilon = K_1 \frac{D^2}{\pi^2 r^4 g} = K_1 \frac{V^2}{g}$$

Pour les expériences dans lesquelles j'ai mis la formule sous la forme

$$\frac{H}{D} = A + BD$$

la perte de charge à l'origine est représentée par

$$\varepsilon = BD^2$$

que je puis écrire

$$\varepsilon = B\pi^2 r^4 g \frac{1)^2}{\pi^2 r^4 g}$$

Pour ces expériences, le coefficient K_1 a donc pour expression

$$K_1 = B\pi^2 r^4 g.$$

On peut donc, pour toutes les expériences de Poiseuille, de M. Couette et les miennes, calculer K_1 . On obtient ainsi

r = rayon du tube	K_1	Valeur de $1 + 0,65 \sqrt{r}$
0,00567	1,039	1,048
0,00708	1,080	1,057
0,0326	1,111	1,116
0,04998	1,150	1,145
0,09036	1,186	1,194
0,0936	1,162	1,194
0,147	1,253	1,249
0,1483	1,250	1,250
0,2103	1,290	1,296
0,2128	1,320	1,302
0,221	1,347	1,317
0,2969	1,379	1,360

Il semble bien que K_1 tende vers 1, quand r tend vers 0.

Donc : la perte de charge à l'entrée est proportionnelle au carré de la vitesse; elle est donnée par $K \frac{V^2}{g}$ et le coefficient K_1 croît avec le rayon à partir de l'unité pour $r = 0$.

(*Observation.* — Dans les expériences de Poiseuille et de M. Couette, le tube débouche dans l'eau; il en résulte une petite perte de charge due aux frottements, mais qui, de l'avis même de Couette, est excessivement faible.)

Si on représente graphiquement les valeurs de K_1 en fonction du rayon, on trouve que ces valeurs sont assez bien représentées par l'équation

$$K_1 = 1 + 0,65 \sqrt{r}$$

(comme le montre la dernière colonne du tableau précédent) équation qui, bien entendu, n'est valable que de $r = 0$ à $r = 0,3$. Les petites écarts qui se présentent entre K_1 et $1 + 0,65 \sqrt{r}$ peuvent s'expliquer par ce fait que dans l'expression de la perte de charge ε , c'est la valeur du rayon à l'entrée qui doit intervenir et non pas le rayon moyen du tube.

Remarque. — M. Couette, dans sa thèse, a calculé théoriquement que la charge absorbée pour communiquer au liquide sa vitesse est donnée par

$$\varepsilon_1 = \frac{D^2}{\pi^2 r^4 g}$$

En admettant l'exactitude de ce résultat, on peut dire alors que la différence entre la perte de charge observée ε et la valeur de ε_1 représente la charge absorbée par les frottements à l'entrée (là où les filets liquides ne sont pas encore parallèles) :

$$\varepsilon - \varepsilon_1 = (K_1 - 1) \frac{D^2}{\pi^2 r^4 g}$$

En définitive, l'équation complète du premier régime s'écrit, pour un tube quelconque :

$$\eta = \frac{\pi r^4 g p}{8 l D} \left(11 - \frac{(1 + 0,65 \sqrt{r}) D^2}{\pi^2 r^4 g} \right)$$

V. — **Comparaison de cette formule avec les formules de correction déjà proposées.** — Je ne ferai que rappeler de nom la formule de Hagenbach; M. Couette a montré qu'elle était insuffisante.

Examinons donc le système de correction proposé par M. Couette. Il se compose de deux parties :

1° Retrancher de H l'expression $\frac{D^2}{\pi^2 r^4 g}$ représentant la perte de charge due à la vitesse;

2° Ajouter à la longueur l du tube une longueur fictive λ pour tenir compte des frottements à l'entrée. D'après M. Couette, λ est égal à environ six fois le rayon et paraît augmenter, dit-il, un peu avec le rayon.

Je vais montrer d'abord que la précision que M. Couette admet pour la correction λ est tout à fait illusoire.

Il s'est servi pour calculer λ des expériences de Poiseuille faites avec les tubes A_6 et A_4 et, d'autre part, aussi des expériences faites par lui-même avec les tubes K_1 et K'_1 ci-dessus.

Sa formule permettant de calculer la valeur de η s'écrit avec mes notations :

$$\eta = \frac{\pi r^4 g \mu}{8 l D} \left(H - \frac{D^2}{\pi^2 r^4 g} \right) \frac{l}{l + \lambda}$$

Je prends alors dans les tableaux des tubes A_6 et A_4 d'une part, et K_1 et K'_1 , d'autre part, les données expérimentales et au moyen de la formule précédente je calcule les valeurs de η en prenant pour λ les valeurs mêmes données par M. Couette et j'inscris les valeurs de η ainsi obtenues dans la dernière colonne de chacun des tableaux relatifs à ces tubes et sous le titre η_k .

On voit que ce système de correction donne les moyennes suivantes :

pour le tube A_6	$\eta = 0,01280$
A_5	$\eta = 0,01298$
A_4	$\eta = 0,01309$
A_3	$\eta_k = 0,01275$

le nombre de Poiseuille à 10° est 0,01309. On ne peut pas dire que l'accord soit suffisant.

Cela tient à ce que cette façon de calculer la valeur de λ est tout à fait incertaine. Il est facile de voir, en effet, que si M. Couette eût employé, pour calculer λ , les deux tubes A_6 et A_5 il eût trouvé une valeur de λ presque nulle; bien mieux, en employant, pour faire le même calcul, les deux tubes B_5 et B_4 , il eût obtenu pour λ une valeur négative, de même avec les tubes C de Poiseuille. Il y a évidemment là, dans ces tubes de Poiseuille, des écarts (les uns en plus, les autres en moins), qui ne sont qu'accidentels et qui rendent ces résultats impropres au calcul d'un terme correctif.

Appliquons maintenant la correction de M. Couette aux tubes K_1 K'_1 qu'il a employés lui-même pour son calcul de λ . On obtient les valeurs de η inscrites dans la dernière colonne η_k des tubes K et K'_1 . Il suffit d'examiner ces nombres, très différents entre eux et très différents de la valeur réelle de η , pour conclure (à mon avis) que ce système de correction est inexact.

Il est certain, d'après ce qui précède, que ma formule donne pour ces tubes des nombres très bons pour valeurs de η (car le coefficient K_1 déduit de l'expérience est 1,150 et la valeur $1 + 0,65 \sqrt{r}$ est = 1,145) et cela malgré les valeurs énormes de la correction dans le cas du tube K'_1 .

Appliquons le système de correction de M. Couette au tube $r = 0,09036$ qu'il a employé lui-même; on a ici $\lambda = 6 r = 0,54$. On trouve pour valeurs de η :

à $13^\circ 5$	$\eta = 0,01260$	au lieu de 0,0118-0,0119
à $11^\circ 3$	$\eta = 0,01302$	au lieu de 0,01265

Pour obtenir une valeur exacte de η avec la deuxième expérience, il faudrait $\lambda = 1^{\text{cm}}88$ au lieu de 0,54.

Prenons encore l'expérience qu'il a faite avec le tube de cuivre cité plus haut, on obtient, en appliquant son système de correction, pour

la 1^{re} expérience $\eta = 0,01159$ au lieu de $0,01077$ à $17^{\circ}3$ (Poiseuille)

la 2^e — $\eta = 0,01294$ — $0,01135$ à $15^{\circ}5$

la 3^e — $\eta = 0,01313$ — $0,01077$ à $17^{\circ}3$

pour obtenir des valeurs de η exactes, il faudrait $\lambda = 11^{\text{cm}5}$ pour la première et la troisième expérience où le débit est le même et égal à $8^{\text{cm}45}$, et $\lambda = 8^{\text{cm}5}$ pour la deuxième expérience, valeurs énormes qui me semblent inadmissibles, le tube de la troisième expérience ayant seulement $44^{\text{cm}4}$.

Nous avons vu que, au contraire, ma formule donne encore avec ce tube de bons résultats, malgré la valeur énorme de la correction dans la troisième expérience.

Il suffit, d'ailleurs, de comparer les valeurs de K_1 déduites des expériences et celles que donne $1 + 0,65\sqrt{r}$ pour s'assurer que ma formule donne avec les tubes de M. Couette et avec les miens de bonnes valeurs de η , et avec les tubes de Poiseuille des valeurs de η , les unes par défaut, les autres par excès.

Voici, du reste, un petit tableau de comparaison entre ma formule et celle de M. Couette.

Tubes de Poiseuille. $t = 10^{\circ}$

Tube	r	l	P	η	η_k
C	0,00427	0,6025		0,01240	0,01120
B ₄	0,005672	0,9	38,7 en Hg	0,01280	0,01230
A ₆	0,007085	0,6775	77,38	0,01360	0,01312
			38,7	0,01350	0,01295
			5	0,01350	0,01272
A ₄	0,007085	1,575	38,8	0,01320	0,01293
			14,82	0,01320	0,01293
A ₃	0,007085	2,555	77,49	0,01290	0,01275
F ₃	0,03264	5,045	H = 132,36 (eau)	0,01289	0,01285
			66,1	0,01311	0,01278
			32,98	0,01318	0,01306

Poiseuille donne à 10° $\eta = 0,01309$.

La formule de M. Couette donne en général des nombres η_k trop faibles avec ces tubes (voir la dernière colonne); la nôtre, des nombres η , tantôt par défaut, tantôt par excès, dont la moyenne est 0,01310.

Tubes de M. Couette.

r	l	H	η	η_k	D'après Poiseuille
0,04998	5,272	8,65 $\times$ 12,58	0,01311	0,01431	0,01285 à 10°7
		4,936 $\times$ 12,58	0,01275	0,01329	
		3,730 $\times$ 12,58	0,01295	0,01329	
		5,894 $\times$ 12,58	0,01344	0,01408	0,01350 à 8°9
0,09036	22,62	5,174 $\times$ 12,58	0,01175	0,01268	0,0119 à 13°6
		2,444 $\times$ 12,58	0,01265	0,01302	0,01267 à 11°3
0,2969	132,9	5,347	0,01076	0,01159	0,01080 à 17°3
		3,847	0,01135	0,01294	0,01135 à 15°5
	44,4	2,661	0,01078	0,01313	0,01080 à 17°3

Tous les nombres η obtenus par ma formule sont inscrits dans la quatrième colonne; ils sont voisins de ceux de Poiseuille; ceux obtenus par la formule de M. Couette η_k s'en écartent beaucoup.

Enfin je donne encore quelques-unes de mes expériences qui n'ont pas été citées précédemment.

Tube $r = 0^{\text{cm}}1285$ $l = 94^{\text{cm}}$ $t = 17^{\circ}5$.

H = 50,2 D = 4,29 $\eta = 0,0108$

35,4 3,18 0,0108 Poiseuille

21,5 2,06 0,0106 0,0107 à 17°5

8,55 0,88 0,0105

les valeurs de η ont été calculées par ma formule.

Tube $r = 0,166$ $l = 84,5$ $t = 14^{\circ}3$.

H = 21 D = 4,93 $\eta = 0,01183$ Poiseuille

8,6 2,28 1173 0,01185 à 14°3

Tube $r = 0,2235$ $l = 101$ $t = 15^{\circ}3$. comme

H = 7,5 D = 5,11 $\eta = 0,01135$ Poiseuille.

Je crois donc pouvoir dire que la formule que je donne est la plus exacte qui ait été proposée jusqu'ici.

VI. — **Interprétation physique de la perte de charge à l'entrée.** — Nous avons vu que pour tous les tubes étudiés (jusqu'à $2r = 0^{\text{cm}}6$), on a avec une grande précision dans tous les cas

$$\frac{H}{D} = A + BD \quad 1^{\text{er}} \text{ régime.}$$

c'est-à-dire que la perte de charge à l'entrée a pour expression

$$\varepsilon = BD^2 \quad \text{en hauteur du liquide.}$$

expression que nous avons mise sous la forme

$$(1) \quad \varepsilon = \frac{K_1 D^2}{\pi^2 r^4 g}$$

K_1 ayant pour valeur (jusqu'au rayon $0^{\text{cm}}3$)

$$(2) \quad K_1 = 1 + 0,65 \sqrt{r}$$

l'équation (1) peut donc s'écrire

$$2g \varepsilon = \frac{D^2}{\frac{1}{2K_1} \pi^2 r^4}$$

On voit alors, d'après la règle de Torricelli, que tout se passe comme si la veine liquide, à son entrée dans le tube, présentait une section contractée s donnée par

$$S = \sqrt{\frac{1}{2K_1}} \pi r^2$$

et dans laquelle les vitesses des divers filets liquides seraient les mêmes.

La valeur du coefficient de contraction

$$\text{serait } \sqrt{\frac{1}{2K_1}} = \sqrt{\frac{1}{2(1 + 0,65 \sqrt{r})}} \text{ jusqu'à } r = 0,3.$$

pour $r = 0$	$\sqrt{\frac{1}{2K_1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$
0,05	$\sqrt{\frac{1}{2,29}} = 0,661$
0,1	$\sqrt{\frac{1}{2,41}} = 0,644$
0,2	$\sqrt{\frac{1}{2,58}} = 0,623$
0,3	$\sqrt{\frac{1}{2,71}} = 0,608$

(L'expression $1 + 0,65 \sqrt{r}$ est-elle applicable à des valeurs de r supérieures à 0,3 ? il serait téméraire de l'affirmer ; il est même probable que non, car le coefficient de contraction ne peut pas diminuer indéfiniment.)

Il serait intéressant de chercher si réellement il existe une section contractée. On sait déjà qu'elle existe pour l'écoulement en mince paroi et aussi par les ajutages courts.

CHAPITRE III

ETUDE DU DEUXIEME REGIME D'ECOULEMENT DANS UN TUBE

Pour faire cette étude, il faut d'abord rappeler deux faits importants :

- 1° Il existe une vitesse critique (déjà vue);
- 2° Il existe aussi dans ce deuxième régime une perte de charge à l'entrée.

I. — **Point critique ou vitesse critique.** — C'est le passage du premier au deuxième régime. C'est le commencement du deu-

xième régime. Reynolds a montré que cette vitesse critique est définie par

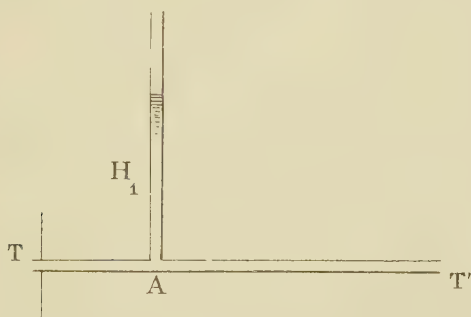
$$\frac{\mu r V_c}{\eta} = 1.000.$$

J'ai vérifié moi-même cette formule.

II. — **Perte de charge à l'entrée du tube.** — Les ingénieurs hydrauliciens admettent, d'après d'anciennes expériences, que la perte de charge à l'entrée d'un tuyau est, pendant le deuxième régime, donnée par

$$\varepsilon = \frac{1,49 D^2}{2g\pi^2 r^4}$$

Les expériences dans lesquelles j'ai placé un tube manométrique en un point A du tube d'écoulement permettent de vérifier



cette formule. Les charges étant exprimées en colonne d'eau.

Soit, en effet, H la charge totale en T; à l'entrée, la charge H_0 absorbée par les frottements à l'intérieur du tube est alors

$$H_0 = H - \varepsilon$$

pour la longueur entière TT' et par unité de longueur elle est

$$\frac{H - \varepsilon}{l}$$

D'autre part, la charge mesurée en A étant H_1 , c'est la charge absorbée par les frottements sur la longueur $l_1 = AT'$ et par

unité de longueur

$$\frac{H_1}{l_1}$$

Si donc la valeur adoptée pour ε est exacte, on doit avoir

$$\frac{H - \varepsilon}{l} = \frac{H_1}{l_1}$$

Voici les résultats fournis par deux de mes tubes déjà cités précédemment :

Tube $r = 0,1483$		$l = 100,3$	$l_1 = 70,1.$	
H	ε	$H_o = H - \varepsilon$	$\frac{H_o}{l}$	$\frac{H_1}{l_1}$
336,65	37,5	299,2	2,983	3,01
317,45	34,6	282,85	2,82	2,84
298,6	32,4	266,2	2,65	2,67
277,55	29,7	247,85	2,47	2,49
218,1	22,37	195,73	1,95	1,967
Tube de rayon moyen $r = 0,2103$		$l = 101,1$	$l_1 = 70,4.$	

Le rayon à l'entrée (voir plus haut) est 0,2065 ; c'est ce rayon que je dois prendre pour calculer ε .

H	ε	$H_o = H - \varepsilon$	$\frac{H_o}{l}$	$\frac{H_1}{l_1}$
324,5	58,5	266	2,63	2,61
305,4	54,3	251,1	2,48	2,45
228,2	39,4	188,8	1,87	1,84
170,5	28,6	141,9	1,40	1,38
113,2	18	95,2	0,941	0,926
75,1	11,4	63,7	0,630	0,621
56,4	8,2	48,18	0,477	0,470
37,55	5,4	32,15	0,318	0,314
30,35	4,48	25,87	0,256	0,253

On voit que dans le premier tableau $\frac{H_o}{l}$ présente par rapport

à $\frac{H_1}{l_1}$ une erreur de $\frac{1}{100}$ par défaut et dans le deuxième tableau de $\frac{1}{70}$ à $\frac{1}{60}$ par excès.

L'expression de ε paraît donc bien exacte.

Je joins, du reste, à mes résultats deux expériences tirées de la thèse de M. Couette.

Dans ses expériences, M. Couette élimine la perturbation aux extrémités par différence en produisant le même débit D à travers deux tubes de même diamètre, mais de longueurs différentes l' et l'' .

Si H' et H'' sont les charges totales exprimées en colonne d'eau à l'entrée de chacun des deux tubes, comme la perte de charge à l'entrée est la même pour les deux tubes, il en résulte que la charge absorbée par les frottements intérieurs est, par unité de longueur,

$$\frac{H' - H''}{l' - l''}$$

Dans ses tableaux, M. Couette exprime cette perte de charge en dynes et la désigne par

$$i = \frac{g(H' - H'')}{l' - l''}$$

Donc si on admet pour la perte de charge à l'entrée

$$\varepsilon = \frac{1,49 D^2}{2g\pi^2 r^4}$$

la charge absorbée par unité de longueur dans les tubes l' et l'' est

$$\frac{H' - \varepsilon}{l'} \quad \text{et} \quad \frac{H'' - \varepsilon}{l''}$$

Si donc la valeur de ε est exacte, on doit avoir

$$\frac{H' - H''}{l' - l''} = \frac{H' - \varepsilon}{l'} = \frac{H'' - \varepsilon}{l''}$$

Remarque. — Les tubes de M. Couette débouchent dans l'eau; il se produit là une légère perte de charge que je néglige : de l'avis même de M. Couette (thèse), elle est excessivement faible.

Voici les résultats fournis par deux de ses tubes :

Tube de cuivre $r = 0,2969$ $l' = 132,94$ $l'' = 44,4$.

D	H'	ε	$H'_o = H' - \varepsilon$	$\frac{H' - \varepsilon}{l'}$	$\frac{H' - H''}{l' - l''}$
23,88	38,18	5,64	32,54	0,246	0,253
27,17	46,62	7,31	39,31	0,296	0,301
27,85	50,78	7,65	43,13	0,325	0,332
52,43	151,95	27,2	124,75	0,94	0,96
60,23	197,5	35,9	161,6	1,216	1,242
63,77	217,1	40,3	176,8	1,330	1,361
68,47	250,2	46,5	203,7	1,530	1,569

Tube de verre $r = 0,13067$ $l' = 27,8$

D	H'	ε	$H'_o = H' - \varepsilon$	$\frac{H' - \varepsilon}{l'}$	$\frac{H' - H''}{l' - l''}$
10,18	108,86	27,3	81,56	2,934	2,954
10,98	126,2	31,8	94,4	3,40	3,43
13,26	190,38	50	140,4	5,05	4,91
14,23	201,1	53,4	147,7	5,30	5,20
15,69	239,77	65	174,77	6,27	6,12
17,63	298,36	82	216,36	7,77	7,53
20,29	389,84	108,5	281,34	10,10	9,96
23,54	509,54	146	363,5	13,00	12,68

Dans ces deux tableaux, on voit qu'entre les nombres des deux dernières colonnes l'erreur est d'environ $1/40$ par défaut dans le premier tableau, par excès dans le deuxième tableau.

Il y a donc lieu de considérer l'expression

$$\varepsilon = \frac{1,49 D^2}{2g\pi^2 r^4}$$

comme représentant la perte de charge à l'entrée du tuyau dans le deuxième régime.

Donc nous pouvons, dans ce qui va suivre, calculer pour chaque expérience la charge H_o absorbée par les frottements à l'intérieur du tube par

$$H_o = H - \frac{1,49 D^2}{2g\pi^2 r^4}$$

III. — Recherche de l'équation représentant le deuxième régime d'écoulement uniforme dans un tube. — L'étude du deuxième régime d'oscillation nous a conduit à cette conclusion :

Il y a lieu d'admettre dans ce deuxième régime le même coefficient de frottement que dans le premier, à condition de prendre pour longueur du chemin suivant lequel les molécules glissent les unes sur les autres une valeur L supérieure à la longueur l de la colonne liquide. En d'autres termes, le mouvement des molécules n'est plus linéaire : on dit qu'il se produit des tourbillons.

Or nous savons que Reynolds, au moyen de filets liquides colorés, a montré l'existence de ces tourbillons dans le deuxième régime d'écoulement uniforme. Il est alors tout naturel d'admettre par analogie que, ici encore, le coefficient de frottement est le même que dans le premier régime, le chemin suivant lequel les molécules glissent les unes sur les autres ayant une valeur L supérieure à la longueur l du tube. Nous définirons la longueur de ce chemin L en admettant que le frottement s'y produit en obéissant à la loi de Poiseuille, c'est-à-dire nous calculerons L par la formule

$$L = \frac{\pi r^4 g H_o \mu}{8 \eta D}$$

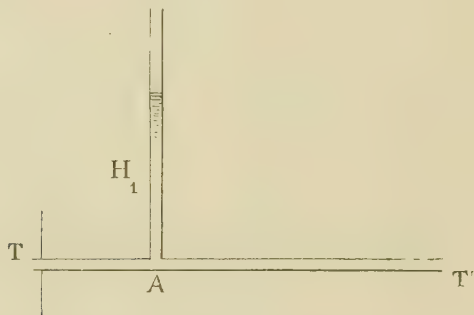
en appelant H_o la charge absorbée par les frottements sur la longueur considérée l du tube.

Au lieu de L , j'ai inscrit $\frac{L}{l}$ dans les tableaux qui suivent.

Dans les quelques expériences où j'ai placé un manomètre en un point A du tube, la valeur de L relative à la longueur AT' de la portion de tube est

$$L = \frac{\pi r^4 g H_1 \mu}{8 \eta D}$$

Dans les autres expériences, j'ai calculé la charge H_0 absorbée



par les frottements sur la longueur entière TT' du tube en retranchant de la charge totale H la perte de charge à l'entrée

$$\varepsilon = \frac{1,49 D^2}{2g\pi^2 r^4}$$

on a donc :

$$H_0 = H - \varepsilon$$

Pour chacun des tubes, j'ai calculé la vitesse critique V_c par la formule de Reynolds

$$\frac{\mu r V_c}{\eta} = 1.000$$

précédemment vérifiée et pour chacune des expériences, j'ai inscrit le rapport $\frac{V}{V_c}$ de la vitesse à la vitesse critique.

A. — RÉSULTATS DE MES EXPÉRIENCES.

1° *Expériences dans lesquelles j'ai éliminé la correction à l'origine par l'emploi d'un manomètre en A.*

Tube		$r = 0^{\text{cm}} 1483$	$l = AT' = 70^{\text{cm}} 1.$		
$t = 15^{\circ}5$	$\eta = 0,0113$	d'où : $V_c = 77,2$		$D_c = 5,32$	
H_1	D	V	$\frac{V}{V_c}$	$\frac{L}{l}$ observé	$\frac{L}{l}$ calculé
211,3	15,34	222	2,91	3,245	3,28
199,3	14,75	214	2,81	3,177	3,19
187,3	14,27	207	2,716	3,09	3,11
174,9	13,67	199	2,61	3,03	3,02
162,6	13,12	190	2,493	2,92	2,91
125,55	11,25	163	2,14	2,625	2,57
100,75	9,9	143,5	1,86	2,39	2,27
37,60	6,17	89,5	1,16	1,41	1,37
143,40	12,42	180	2,36	2,73	2,77
112,50	10,77	156	2,05	2,46	2,46

Je ferai observer de suite, comme M. Couette l'a déjà lui-même remarqué, que dans le voisinage du point critique les mesures manquent de précision, car le niveau du liquide dans le manomètre oscille (souvent de 1 à 2 centimètres au point critique même) et il en résulte des variations dans le débit. Il ne faudra donc pas s'étonner si les expériences voisines du point critique s'écartent un peu du calcul.

Tube $r = 0,21225$			$l = AT' = 71^{\text{cm}}3$		
$t = 14^{\circ}2$		$\eta = 0,0118$	$V_c = 56$	$D_c = 7,91$	
H_1	D	V	$\frac{V}{V_c}$	$\frac{L}{l}$ observé	$\frac{L}{l}$ calculé
185,2	36,97	262	4,70	4,64	4,70
174,25	35,63	252	4,524	4,54	4,56
163,5	34,37	243	4,36	4,44	4,44
152,75	33,26	235	4,22	4,27	4,33
130,85	30,36	215	3,86	4	4,05
98,40	25,76	182	3,25	3,55	3,565
76,7	22,26	157,4	2,81	3,21	3,19
55,05	18,46	131	2,35	2,76	2,76
44,25	16,39	115,9	2,07	2,51	2,49
33,45	13,87	98	1,754	2,24	2,12
22,4	11,24	79,5	1,42	1,81	1,76

2° *Expériences portant sur le tube entier.*

Tube $r = 0,1285$				$l = TT' = 94^{\text{cm}}$		
$t = 17^{\circ}3$		$\eta = 0,0108$	$V_c = 84$	$D_c = 4,356$		
H	H_0	D	V	$\frac{V}{V_c}$	$\frac{L}{l}$ observé	$\frac{L}{l}$ calculé
252	227,5	9,32	179,7	2,139	2,518	2,54
220,2	199,1	8,65	166,8	1,98	2,382	2,39
196,7	178,1	8,12	156,6	1,86	2,272	2,27
174,8	158,6	7,57	146	1,737	2,17	2,13
158,4	143,9	7,16	137,3	1,64	2,08	2,03
145	131,7	6,86	132,3	1,58	1,98	1,95
124,5	113	6,36	122,65	1,46	1,84	1,80
107,7	97,6	5,96	114,9	1,37	1,695	1,68
93,2	84,2	5,64	108,8	1,29	1,54	1,56
79,9	71,8	5,35	103,2	1,22	1,39	1,46
64,2	57,3	4,96	95,6	1,13	1,21	1,29

Tube $r = 0,1660$ $l = 84,5$
 $t = 14^{\circ}2$ $\eta = 0,0118$ $V_c = 71,1$ $D_c = 6,15$

H	H ₀	D	$\frac{V}{\bar{V}_c}$	$\frac{L}{\bar{l}}$ observé	$\frac{L}{\bar{l}}$ calculé
223,6	192,1	17,6	2,86	3,20	3,22
196,6	169,2	16,45	2,67	3,02	3,06
174,3	150,8	15,25	2,48	2,90	2,89
158	137	14,40	2,34	2,79	2,76
144	124,9	13,70	2,23	2,67	2,65
123,5	107,5	12,55	2,04	2,51	2,46
107	93,4	11,57	1,88	2,36	2,29
92,5	81,1	10,61	1,73	2,24	2,15
48,5	42,4	7,70	1,26	1,61	1,53
35,2	30,2	7	1,14	1,26	1,33

 Tube $r = 0,221$ $l = 68.$
 $t = 15^{\circ}$ $\eta = 0,0115$ $V_c = 52$ $D_c = 7,98$

H	H ₀	D	$\frac{V}{\bar{V}_c}$	$\frac{L}{\bar{l}}$ observé	$\frac{L}{\bar{l}}$ calculé
217	166,4	39,6	4,93	4,93	4,89
190	146,3	36,77	4,60	4,67	4,63
161,3	124,4	33,8	4,23	4,33	4,34
139,6	108,4	31,05	3,88	4,10	4,08
103,8	81,7	26,14	3,27	3,67	3,59
75,5	59,8	22,03	2,76	3,18	3,14
33,5	27,1	14,10	1,77	2,25	2,17
20,2	16,3	11,00	1,38	1,74	1,69

Tube $r = 0,2267$				$l = 33,4$		
$t = 13^{\circ}2$		$\eta = 0,0122$		$V_c = 53,8$		
H	H _o	D	V	$\frac{V}{V_c}$	$\frac{L}{l}$ observé	$\frac{L}{l}$ calculé
207,7	125,4	53,05	329	6,11	5,89	5,71
182,5	110,4	49,62	307	5,71	5,56	5,47
146,7	90,2	44,03	273	5,07	5,11	4,97
114,9	71	38,75	240	4,46	4,57	4,52
84	53	32,77	203	3,77	4,04	3,99
58,7	38	26,72	166	3,08	3,54	3,44
32	21,2	19,25		2,22	2,73	2,65
19,4	12,9	14,90		1,72	2,16	2,11

Tube $r = 0,355$				$l = 100,4$		
$t = 13^{\circ}2$		$\eta = 0,0122$		$V_c = 34,3$		
H	H _o	D	V	$\frac{V}{V_c}$	$\frac{L}{l}$ observé	$\frac{L}{l}$ calculé
120,5	89,1	80,5	203,5	5,91	5,55	5,55
94,2	70,2	70,3	177,6	5,16	5,01	5,03
71,1	53,8	59,8	151,1	4,39	4,51	4,47
47,2	36,4	47,2	119,3	3,47	3,86	3,77

Représentation algébrique de ces résultats.

Pour la trouver, il suffit de se rapporter au graphique tracé sur la feuille de papier quadrillé où l'on a porté

$$\text{en ordonnées } y = \frac{H_1}{D}$$

$$\text{en abscisses } x = D$$

Pour un tube donné, D est proportionnel à V.

Par conséquent, pour un tube donné, l'ordonnée y est propor-

tionnelle à

$$\frac{\pi r^4 g \mu}{8 \eta l} \cdot \frac{H_1}{D} = \frac{L}{l}$$

l'abscisse x est proportionnelle à

$$\frac{V}{V_c}$$

La courbe représentant $\frac{L}{l}$ en fonction de $\frac{V}{V_c}$ est donc analogue à la courbe y x représentée sur le graphique. C'est une courbe d'allure parabolique paraissant avoir son sommet au point critique. Il faut essayer l'équation

$$\left(\frac{L}{l} - 1\right)^m = n \left(\frac{V}{V_c} - 1\right) \quad (1)$$

Car il est clair qu'au point critique (algébrique), début du deuxième régime, on doit avoir

$$L = l \quad \text{et} \quad V = V_c$$

En prenant les logarithmes, l'équation (1) ci-dessus s'écrit :

$$m \log \left(\frac{L}{l} - 1\right) = \log n + \log \left(\frac{V}{V_c} - 1\right)$$

J'ai alors porté

$$\text{en abscisses } x = \log \left(\frac{L}{l} - 1\right)$$

$$\text{en ordonnées } y = \log \left(\frac{V}{V_c} - 1\right)$$

J'ai obtenu parfaitement une droite définie par

$$m = 1,36 \quad n = 1,6$$

pour tous les tubes.

L'équation représentant le deuxième régime est donc (au moins dans le cas de l'eau) :

$$\left(\frac{L}{l} - 1\right)^{1,36} = 1,6 \left(\frac{V}{V_c} - 1\right)$$

La dernière colonne des tableaux précédents contient les valeurs de $\frac{L}{l}$ calculées au moyen de cette formule; les valeurs de V étant fournies par l'expérience, c'est-à-dire on calcule $\frac{L}{l}$ par

$$\frac{L}{l} = 1 + \left[1,6 \left(\frac{V}{V_c} - 1 \right) \right] \frac{1}{1,36}$$

On voit que, en général, l'erreur ne dépasse pas 1/40 (sauf pour deux ou trois expériences voisines du point critique, j'ai dit pourquoi).

B. — EMPLOI DES EXPÉRIENCES DE BOSSUT.

Les résultats précédents n'ont été obtenus qu'avec des tubes d'assez faibles dimensions. Les moyens dont je disposais ne m'ayant pas permis d'en employer d'autres, j'ai eu recours à de très anciennes expériences exécutées par Bossut vers 1750 et que j'ai relevées dans son traité d'hydrodynamique.

Je dois dire que ces expériences très soignées ont toujours inspiré une grande confiance aux hydrauliciens qui y ont eu recours pour la recherche de formules capables de représenter le deuxième régime.

Bossut n'indique pas la température de ses expériences; elles ont été faites à la température ambiante. Pour en faire le calcul, j'ai admis la température 12° à laquelle on a $\eta = 0,0125$ (je reviendrai plus loin sur ce point).

J'ai calculé H_o par

$$H_o = H - \frac{1,49 D^2}{2g\pi^2 r^4}$$

et V_c par la formule de Reynolds :

$$\frac{\mu r V_c}{\eta} = 1.000$$

Voici le tableau des résultats :

Tube $r = 2^{\text{cm}}71$ charge constante $H = 65^{\text{cm}}$ $V_c = 4,6$

La longueur variable l du tube est inscrite dans le tableau.

H_0	l	D	V	$\frac{V}{V_c}$	$\frac{L}{l}$ observé	$\frac{L}{l}$ calculé
45,3	975	3710	161,3	35,04	20,82	19,94
54,5	1950	2708	117,8	25,6	17	15,9
57,7	2925	2250	97,8	21,3	14,56	13,98
59,6	3900	1946	84,6	18,45	13	12,6
60,7	4875	1730	75,2	16,45	11,95	11,6
61,5	5850	1558	67,7	14,75	11,20	10,8

Tube $r = 2,71$ charge constante $H = 32,5$ $V_c = 4,6$

H_0	l	D	V	$\frac{V}{V_c}$	$\frac{L}{l}$ observé	$\frac{L}{l}$ calculé
23,29	975	2540	110,4	24	15,63	15,18
27,67	1950	1840	80	17,4	12,8	12,1
29,29	2925	1500	65,2	14,2	11,02	10,45
30,07	3900	1304	56,7	12,33	9,79	9,45
30,58	4875	1152	50,1	10,85	9	8,63
30,98	5850	1032	44,8	9,74	8,54	8,43

Tube $r = 1,81$ charge constante $H = 65$ $V_c = 6,9$

H_0	l	D	V	$\frac{V}{V_c}$	$\frac{L}{l}$ observé	$\frac{L}{l}$ calculé
51,92	975	1.345	130,6	18,93	13,08	12,8
58,46	1950	955	92,7	13,44	10,36	10,02
60,66	2925	778	75,5	10,95	8,80	8,65
61,83	3900	665	64,6	9,36	7,88	7,75
62,56	4875	583	56,6	8,20	7,28	7,07
63,04	5850	524	50,9	7,40	6,78	6,53

Tube $r = 1,81$ charge constante $H = 32,5$ $V_c = 6,9$

H_0	l	D	V	$\frac{V}{V_c}$	$\frac{L}{l}$ observé	$\frac{L}{l}$ calculé
26,46	975	918	89,1	12,91	9,78	9,73
29,5	1950	647	62,9	9,12	7,73	7,60
30,52	2925	525	50,9	7,38	6,57	6,52
31,1	3900	447	43,4	6,30	5,90	5,80
31,42	4875	389	37,8	5,48	5,47	5,26
31,63	5850	348	33,8	4,90	5,10	4,90

Le rayon $2^{cm}71$ est environ huit fois plus grand que le plus grand rayon que j'ai employé (0,355) et cependant il y a encore une bonne concordance entre l'expérience et le calcul. Remarquons, en effet, que si les nombres calculés sont de $\frac{1}{15}$ à $\frac{1}{40}$ plus faibles que les nombres observés, il doit en être ainsi : car la formule a été établie pour des tubes de verre, c'est-à-dire à parois très lisses, tandis que les tubes de Bossut sont des tubes de fer-blanc poli avec des raccords donc, certes, moins lisses que des tubes de verre d'une seule pièce : or il est évident que rugosités et raccords favorisent la production des tourbillons et par conséquent augmentent la valeur de L . L observé doit être plus grand que L calculé.

Quant au choix que j'ai fait : $t = 12^\circ$ (ambiante) $\eta = 0,0125$, il n'a pas grande influence sur le rapport $\frac{L \text{ observé}}{L \text{ calculé}}$, car dans l'expression du $\frac{L}{l}$ observé et dans l'expression de $\frac{L}{l}$ calculé, qui est

$$1 + \left[1,6 \left(\frac{V}{V_c} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{1,36}}$$

η entre en dénominateur dans les deux. D'ailleurs, la vraie valeur de η ne peut différer de 0,0125 que de quelques unités du

quatrième chiffre. Je pense, d'après cela, que l'influence du nombre choisi pour η ne peut être que très faible.

Donc, en définitive, la formule trouvée représente le phénomène déjà dans de très larges limites de rayon et de vitesse et elle le représente jusque dans le voisinage du point critique, puisque pour quelques-uns de mes tubes la valeur de $\frac{V}{V_c}$ s'abaisse jusqu'à 1,14.

Je veux pourtant encore citer quelques expériences de M. Couette et les soumettre à la formule que j'ai donnée.

C. — EMPLOI DES EXPÉRIENCES DE M. COUETTE.

En éliminant par différence (comme il a été expliqué précédemment) la perte de charge à l'entrée, M. Couette déduit de ses expériences la valeur

$$i = \frac{gH_0 l^2}{l}$$

charge exprimée en dynes que les frottements absorbent par unité de longueur et il donne dans ses tableaux le rapport $\frac{i}{q}$, q étant le débit, de sorte qu'on calcule facilement

$$\frac{L}{l} = \frac{\pi r^4 g H_0 l^2}{8 \eta l D} \quad \text{par} \quad \frac{\pi r^4}{8 \eta} \cdot \frac{i}{q}$$

Les observations faites avec un même tube n'étant pas toutes à la même température, je les ai divisées en groupes de façon que chaque groupe ne contienne que des températures peu différentes.

Tube de verre				$r = 0,00036$		
$t = 11^{\circ}5$		$\eta = 0,0126$		$V_c = 139$		
q	$\frac{i}{q}$	V	$\frac{V}{V_c}$	$\frac{L}{l}$ observé	$\frac{L}{l}$ calculé	
11,089	1666	433,2	3,11	3,48	3,44	
9,655	1505	377,3	2,71	3,15	3,10	
8,022	1314	313,5	2,26	2,74	2,68	

Tube de verre			$r = 0,13067$		
$t = 9^{\circ}2$		$\eta = 0,0136$	$V_c = 104$		
q	$\frac{i}{q}$	V	$\frac{V}{V_c}$	$\frac{L}{l}$ observé	$\frac{L}{l}$ calculé
23,54	526,8	439	4,22	4,39	4,34
20,29	479,9	379	3,65	4	3,90
17,63	417,1	329	3,16	3,49	3,49
15,69	379,3	292	2,81	3,17	3,19

Même tube		$t = 10^{\circ}5$	$\eta = 0,0130$	$V_c = 100$	
15,69	381,1	292	2,92	3,30	3,28
14,23	358,1	265	2,65	3,10	3,04
11,95	309,3	223	2,23	2,68	2,65
10,18	284,7	189	1,89	2,46	2,30
13,76	349,2	256,6	2,57	3,02	2,97

Tube de cuivre			$r = 0,2969$		
$t = 15^{\circ}5$		$\eta = 0,01135$	$V_c = 38$		
q	$\frac{i}{q}$	V	$\frac{V}{V_c}$	$\frac{L}{l}$ observé	$\frac{L}{l}$ calculé
68,47	22,58	247	6,50	6,07	5,97
60,23	20,25	217,5	5,73	5,45	5,43
27,85	11,82	100,6	2,65	3,17	3,07
23,88	10,45	86,4	2,28	2,80	2,71
63,77	21,03	230,4	6,06	5,66	5,66
52,43	18,05	189,4	4,99	4,86	4,91
27,17	10,89	98,2	2,60	2,94	2,99

IV. — Formule représentant le deuxième régime. — La formule

$$\left(\frac{L}{l} - 1\right)^{1,36} = 1,6 \left(\frac{V}{V_c} - 1\right)$$

se trouve donc aussi d'accord avec les expériences de M. Couette.

Le rayon du tube a varié de 0,09 à 2,71 (rapport 1 à 30).

La vitesse a varié de 33 à 439.

Le débit, de quelques centimètres cubes à 3710 centimètres cubes.

La charge absorbée par unité de longueur a varié aussi depuis quelques centièmes de millimètre dans les expériences de Bos-sut jusqu'à 20 centimètres dans celles de M. Couette.

Elle représente donc bien le deuxième régime.

V. — Comparaison de cette formule avec celle de Reynolds et celle de Hagen. — Hagen et, plus récemment, Reynolds ont cherché à représenter le deuxième régime. Dans ses leçons sur la viscosité (p. 216), M. Brillouin s'exprime ainsi :

« Quand le deuxième régime est bien constitué, les expériences sont bien représentées par une formule de la forme (avec ma notation)

$$\frac{H_o}{l} = KV^n$$

K est une fonction du rayon, n est indépendant du tube. Reynolds donne $n = 1,722$; Hagen donne 1,75. »

Quand le deuxième régime est bien constitué veut dire assez loin du point critique. La formule de Reynolds ne s'applique donc pas jusque dans le voisinage du point critique. La formule que je propose s'applique jusque assez près de ce point.

Si on néglige 1 devant $\frac{L}{l}$ et $\frac{V}{V_c}$, c'est-à-dire si on se place très loin du point critique (en tenant compte de ce que $\frac{1}{1,36} = 0,735$ et $\frac{\mu r V_c}{\eta} = 1000$), notre formule s'écrit

$$\frac{r^2 g \mu}{8 \eta} \frac{H_o}{l} = \left(1,6 \frac{\mu r}{1.000 \eta} \right)^{0,735} V^{1,735}$$

elle est donc analogue aux précédentes.

Mais examinons les expériences mêmes de Reynolds.

Les expériences de Reynolds ont été publiées dans le *Philosophical transactions of the royal Society of London*, 1883, volume 174, 3^e partie.

Reynolds a mesuré la pression H_1 (exprimée en colonne d'eau) absorbée par les frottements entre deux points du tube distants d'une longueur L .

Il donne pour chaque expérience la vitesse moyenne V .

Il est donc facile de calculer pour chacune des expériences la valeur de l'expression $\frac{L}{l}$

$$\frac{L}{l} = \frac{\pi r^4 g \mu}{8 \eta l} \frac{H_1}{D}$$

($\mu = 1$ pour l'eau) que nous écrirons ici en fonction de V

$$\frac{L}{l} = \frac{r^2 g \mu}{8 \eta V} \frac{H_1}{l}.$$

Dans les deux tableaux suivants relatifs aux expériences de Reynolds, j'ai inscrit non pas les valeurs de H_1 , mais celles de $\frac{H_1}{l}$, charge absorbée par les frottements par centimètre.

Dans la deuxième colonne, la vitesse moyenne V donnée dans les tableaux de Reynolds.

Dans la troisième, les valeurs de $\frac{L}{l}$ calculées comme je viens de l'indiquer, c'est-à-dire déduites de l'expérience.

Ces expériences se rapportent à la température de 5° pour laquelle $\eta = 0,0153$ et j'ai, pour chacun des tubes, calculé la vitesse critique au moyen de la loi de Reynolds :

$$\frac{\mu r V_c}{\eta} = 1.000$$

Les tubes sont en plomb bien poli.

Tube n° 4 de Reynolds.

$$r = 0^{\text{cm}}3075 \quad l = 152^{\text{cm}}4 \quad t = 5^{\circ} \quad \eta = 0,0153 \quad V_c = 50$$

N° d'ex- périence	$\frac{H_1}{l}$	V	$\frac{L}{l}$ observé	$\frac{L}{l}$ calculé
35	3,873	468,9	6,31	6,42
34	3,444	446,7	5,87	6,20
33	3,274	419,8	5,95	5,98
32	2,865	387,3	5,65	5,65
31	2,455	354	5,29	5,31
30	2,042	311,2	4,99	4,89
29	1,637	267,4	4,67	4,40
28	1,637	272,9	4,57	4,48
27	1,433	266,1	4,13	4,32
26	1,228	238,8	3,92	4,02
25	1,021	215,8	3,60	3,74
24	0,8185	185,4	3,37	3,37
22	0,4306	128,3	2,56	2,58
21	0,3014	103,3	2,22	2,20
20	0,2148	81,85	2	1,85
19	0,1714	72,3	1,80	1,67
16	0,1292	63,4	1,53	1,45
13	0,1033	58,2	1,35	1,31
12	0,0946	56,5	1,27	1,26
11	0,0861	54,83	1,20	1,21

Tube n° 5 de Reynolds.

$r = 0^{\text{cm}} 635$ $l = 152^{\text{cm}} 4$ $t = 5^{\circ}$ $\tau = 0,0153$ $V_c = 23,2$

N° d'ex- périence	$\frac{H_1}{l}$	V	$\frac{L}{l}$ observé	$\frac{L}{l}$ calculé
100	3,244	706,4	14,95	14,8
99	3,141	696,7	14,7	14,6
98	2,717	639,8	13,83	13,77
97	2,302	587,5	12,75	12,92
96	1,884	526,1	11,66	11,92
95	1,466	448,8	10,6	10,7
93	1,045	382	8,91	9,5
92	0,628	278,7	7,35	7,60
90	0,4188	223,4	6,15	6,49
89	0,3141	183,3	5,59	5,70
86	0,1718	132,8	4,24	4,52
85	0,1289	111	3,84	4
83	0,1072	99,3	3,63	3,71
82	0,1026	94,2	3,55	3,60
81	0,0982	90,4	3,54	3,50
80	0,0938	87,8	3,48	3,43
79	0,08934	85,2	3,41	3,35
78	0,08473	83,8	3,29	3,31
77	0,08036	81,3	3,22	3,24
76	0,07586	77,5	3,18	3,07
75	0,07145	74,9	3,10	3,06
74	0,06252	67,2	3	2,84
72	0,05483	65,3	2,73	2,77
71	0,04467	58,75	2,48	2,56
70	0,03573	52,61	2,24	2,34
69	0,02680	46,86	2	2,04
68	0,01787	34,84	1,68	1,69
67	0,01203	29,05	1,35	1,43
66	0,01117	28,30	1,30	1,36
64	0,00957	27,10	1,18	1,27

J'ai procédé ensuite comme pour mes propres expériences; j'ai représenté graphiquement ces résultats en portant

$$\text{en abscisses} \quad \log \left(\frac{L}{l} - 1 \right)$$

$$\text{en ordonnées} \quad \log \left(\frac{V}{V_c} - 1 \right)$$

J'ai obtenu ainsi la droite

$$1,36 \log \left(\frac{L}{l} - 1 \right) = \log 1,2 + \log \left(\frac{V}{V_c} - 1 \right)$$

Les expériences de Reynolds sont donc représentées par l'équation

$$\left(\frac{L}{l} - 1 \right)^{1,36} = 1,2 \left(\frac{V}{V_c} - 1 \right)$$

Les deux tableaux précédents contiennent dans la dernière colonne les valeurs de $\frac{L}{l}$ calculées par cette formule.

On peut voir que l'erreur relative entre le calcul et l'observation dépasse très rarement 1/30. L'accord est donc satisfaisant et on peut dire jusque très près du point critique.

Les expériences de Reynolds donnent

$$\left(\frac{L}{l} - 1 \right)^{1,36} = 1,2 \left(\frac{V}{V_c} - 1 \right)$$

les miennes ont donné

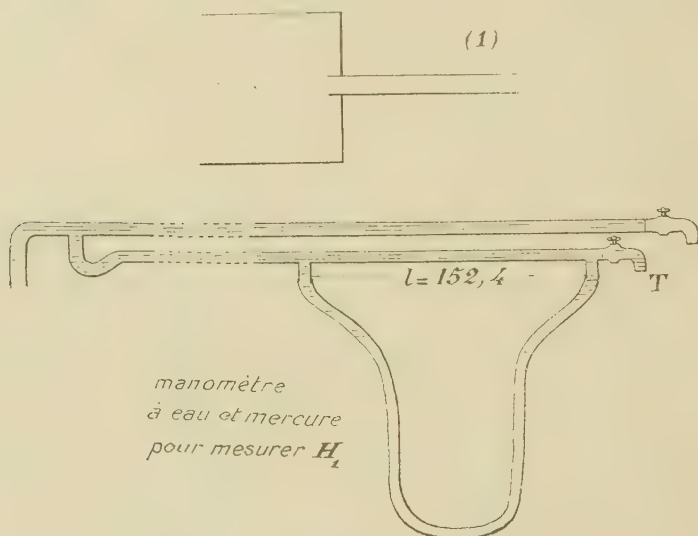
$$\left(\frac{L}{l} - 1 \right)^{1,36} = 1,6 \left(\frac{V}{V_c} - 1 \right).$$

Les deux formules sont exactement du même type, l'exposant du premier membre est le même; la seule différence est que les coefficients numériques des seconds membres diffèrent.

Quelle en est la raison ?

A mon avis, cette différence est due à la différence des dispo-

sitifs d'appareils dans les deux cas. Dans les expériences de Bossut, celles de M. Couette et les miennes, l'extrémité d'entrée de l'eau dans le tube débouche dans un large réservoir, comme le rappelle la figure (1) ci-contre; tandis que dans les expé-



riences de Reynolds, le tube étudié T est branché sur un autre tube, sans doute à peine plus large, comme l'indique la gravure du mémoire et, de plus, l'extrémité de sortie est recourbée vers le bas et munie d'un robinet. Ces raisons, et à mon avis *surtout la première*, doivent avoir une influence sur le développement du mouvement tourbillonnaire tendant à le diminuer.

Nous trouverons, du reste, plus loin une autre forme d'appareil où le mouvement du fluide est aussi uniforme et pour lequel le type d'équation est encore le même avec le même exposant 4,36, mais aussi dans le second membre un coefficient différent.

VI. — **Comparaison avec la formule de M. Maurice Lévy.** — M. Maurice Lévy a établi théoriquement pour les tuyaux neufs, c'est-à-dire à parois lisses, une formule qui, écrite en unités *egs*, est

$$\frac{H_0}{l} = \frac{0,0148 D^2}{2g\pi^2 r^2 (1 + 0,3\sqrt{r})}$$

$\frac{H_o}{l}$ représentant en colonne d'eau la charge que les frottements absorbent par unité de longueur.

M. Maurice Lévy a donné pour les tuyaux incrustés une formule qui ne diffère de la précédente que par le facteur constant 0,0148 et qui est très appréciée des hydrauliciens, surtout pour les grands diamètres.

Je me suis borné à calculer $\frac{H_o}{l}$ pour quelques exemples par cette formule et par la mienne.

r_{cm}	$\frac{cm}{V_{sec}}$	$\frac{H_o}{l}$ par Lévy	$\frac{H_o}{l}$ par la mienne
10	200	0,0132	0,0135
26,5	90	0,00089	0,00082
47,5	157	0,00126	0,00113
55	84	0,000302	0,000314
87,5	125	0,000354	0,000345

Ainsi, même pour ces tubes de diamètres énormes, il existe une bonne concordance entre les deux formules.

On peut donc admettre que la formule que j'ai obtenue représente le deuxième régime pour un tube de dimensions quelconques. C'est la seule qui, jusqu'ici, établisse une relation entre chacun des deux régimes et le point critique. Les formules antérieures ne représentaient le deuxième régime que loin du point critique; celle-ci le représente jusque dans le voisinage du point critique.

VII. — Généralisation pour un liquide quelconque de la formule représentant le deuxième régime d'écoulement uniforme.

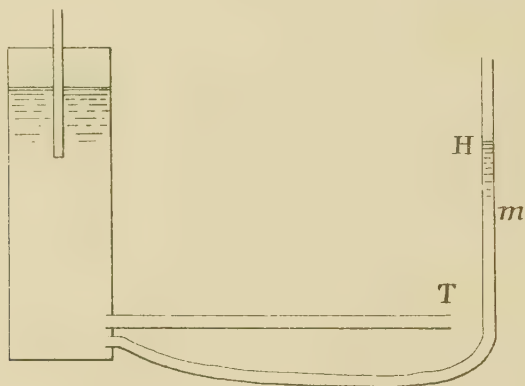
— Jusqu'ici la formule

$$\left(\frac{L}{l} - 1\right)^{1,36} = 1,6 \left(\frac{V}{V_c} - 1\right)$$

n'est évidemment valable que pour l'eau.

Il s'agit de voir ce qu'elle donne pour les autres liquides. Il faut pour cela faire écouler d'autres liquides en assez grande quantité. Leur prix devient alors un obstacle. C'est pourquoi je me suis adressé d'abord à l'alcool dénaturé.

Un vase formant flacon de Mariotte et ayant environ 80 centimètres de hauteur contient le liquide et porte à la partie inférieure le tube d'écoulement. La charge en colonne de liquide est mesurée en TH au moyen du manomètre m et au cathétomètre.



Première expérience. — Alcool dénaturé. J'ai mesuré d'abord son coefficient de frottement par la méthode de Poiseuille et par ma méthode d'oscillation.

Par la méthode de Poiseuille : le tube employé est

$$l = 97^{\text{cm}} \quad r = 0,2807$$

La charge

$$H = 26^{\text{cm}} 5.$$

Le débit déterminé par plusieurs mesures est $18^{\text{cm}} 7$ (mesuré par pesée; la densité du liquide est 0,833).

Je calcule la perte de charge ε à l'entrée au moyen de la formule que j'ai établie :

$$\varepsilon = \frac{(1 + 0,65 \sqrt{r}) D^2}{\pi^2 r^4 g}$$

d'où $\varepsilon = 7^{\text{cm}} 3.$

Donc

$$H_0 = 26,5 - 7,3 = 19,2.$$

Alors η est donné par

$$\eta = \frac{\pi r^4 g H_0 \rho}{8 l D} = 0,0211 \text{ à } 16^\circ 5.$$

Par ma méthode d'oscillation, le tube en U employé a un rayon $r = 0,2222$.

La longueur de la colonne liquide est $r = 68^{\text{cm}} 4$ et j'obtiens

$2 a_1$	$2 a_3$	$\frac{a_1}{a_3}$
7,956	0,990	8,04
11,846	1,492	8,01
15,903	1,972	8,07

Il s'agit donc du premier régime d'oscillation; la formule que j'ai donnée pour le représenter donne

$$\eta = 0,0214 \text{ à } 16^\circ 4.$$

Expérience d'écoulement continu (2^{me} régime) avec l'alcool dénaturé. — Tube $r = 0,2807$; $l = 54^{\text{cm}}$.

Charge totale : $57^{\text{cm}} 1$.

Le débit (mesuré par pesée et au chronomètre à arrêt) est :

$$D = 36^{\text{cmc}} 15.$$

La perte de charge à l'entrée (2^{me} régime) est donnée par

$$\varepsilon = \frac{1,49 D^2}{2 g \pi^2 r^4} = 16,2$$

On a donc :

$$H_0 = 57,1 - 16,2 = 40,9.$$

Je calcule alors la longueur L (du chemin tourbillonnaire) par

$$L = \frac{\pi r^4 g H_0 \rho}{8 \eta D} = 107^{\text{cm}} 2 \quad \eta = 0,0213.$$

D'où

$$\frac{L}{l} = 1,983.$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{L}{l} - 1\right)^{1,36} = 0,975$$

La vitesse V est d'ailleurs

$$V = \frac{36,15}{\pi r^2} = 146,2.$$

En calculant alors V_c par la formule

$$\left(\frac{L}{l} - 1\right)^{1,36} = 1,6 \left(\frac{V}{V_c} - 1\right)$$

on obtient

$$V_c = 91,93.$$

Or si on calcule V_c par la formule

$$\frac{\mu r V_c}{\eta} = 1.000.$$

on obtient

$$V_c = 90,2.$$

L'accord est satisfaisant.

Expérience du deuxième régime avec l'éther. — J'ai choisi ce liquide parce que son coefficient de frottement est environ dix fois plus faible que celui de l'alcool dénaturé. C'est le même éther que j'ai employé dans la méthode des oscillations, où j'ai trouvé pour son coefficient de frottement $\eta = 0,00253$ à $14^\circ 5$; densité 0,723.

L'expérience a donné les résultats suivants :

Tube $r = 0,2807$; $l = 54^{\text{cm}}$; $t = 14^\circ 5$.

Charge totale $H = 56,1$.

Le débit déterminé par plusieurs expériences est

$$D = 42^{\text{cmc}}$$

d'où

$$V = 170 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

La correction à l'entrée est

$$\varepsilon = \frac{1,49 D^2}{2g\pi^2 r^4} = 21,9$$

d'où

$$H_0 = H - \varepsilon = 34,2.$$

La longueur L calculée comme précédemment est

$$L = 501$$

d'où

$$\frac{L}{l} = 10,40$$

ce qui donne

$$\left(\frac{L}{l} - 1\right)^{1,36} = 21,1.$$

On doit donc avoir :

$$\frac{V}{V_c} - 1 = \frac{21,1}{1,6}$$

d'où

$$V_c = 12.$$

La formule de Reynolds donne

$$V_c = 12,38.$$

Quoique je n'aie ici que deux expériences, je pense que l'on peut en conclure que la formule

$$\left(\frac{L}{l} - 1\right)^{1,36} = 1,6 \left(\frac{V}{V_c} - 1\right)$$

est applicable à tous les liquides et à tous les tubes pour le deuxième régime.

Nous verrons, du reste, un peu plus loin une autre expérience de généralisation.

Le paragraphe suivant viendra, du reste, donner une nouvelle force à cette conclusion.

Je veux cependant auparavant mettre le résultat obtenu sous une autre forme.

VIII. — Théorème des états correspondants. — Appelons L la longueur du chemin tourbillonnaire précédemment défini (2^{me} régime). La longueur l du tube est la valeur que prend L au point critique; je puis donc dire que l représente la longueur critique dans le deuxième régime.

Si pour deux tubes différents on a $\frac{L'}{l} = \frac{L''}{l''}$, je dirai que les longueurs L' L'' sont correspondantes; si dans ces tubes on réalise des vitesses telles que $\frac{V'}{V'_c} = \frac{V''}{V''_c}$, on dira que ces vitesses sont correspondantes.

$\frac{L}{l} = \lambda$ est la mesure du chemin tourbillonnaire en prenant pour unité la longueur critique l . Je dirai que λ est la longueur réduite. Je dirai de même que $\frac{V}{V_c} = \varphi$ est la vitesse réduite.

Et alors l'équation du deuxième régime

$$\left(\frac{L}{l} - 1\right)^{1,36} = 1,6 \cdot \frac{V}{V_c} - 1$$

prend la forme réduite :

$$(\lambda - 1)^{1,36} = 1,6 (\varphi - 1).$$

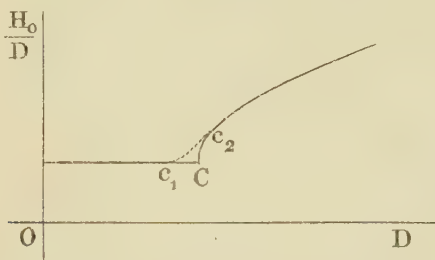
Théorème. — Pour des vitesses correspondantes, les longueurs des chemins tourbillonnaires sont aussi correspondantes, quels que soient le tube et le liquide.

Mais on peut donner à l'équation une forme plus intéressante, où se trouvent expliquées les charges et les vitesses.

Je rappelle d'abord que si on représente $\frac{H_0}{D}$ en fonction de D ,

on obtient : pour le premier régime, une ligne horizontale

$\frac{H_o}{D} = c^{te}$ ou $\frac{H_o}{V} = c^{te}$; pour le deuxième régime, une courbe pa-



rabolique rappelée par la figure ci-contre. Le point critique C est défini algébriquement par la rencontre de ces deux courbes. Mais pratiquement, le passage d'un régime à l'autre se fait non par un point anguleux, mais suivant la courbe en pointillé $C_1 C_2$: il y a une région critique. Les deux régimes empiètent en quelque sorte l'un sur l'autre et sans doute ceci est dû, au moins en partie, aux inévitables variations du rayon d'un bout à l'autre du tube.

Désignons alors par D_c le débit critique au point C, par H_{oc} la charge qui lui correspond; ces deux grandeurs sont liées par la relation de Poiseuille :

$$l = \frac{\pi r^4 g \mu}{8 \eta} \cdot \frac{H_{oc}}{D_c}$$

Comme d'ailleurs on a pour une charge quelconque du deuxième régime (corrigée toujours de la perte à l'entrée) :

$$L = \frac{\pi r^4 g \mu}{8 \eta} \cdot \frac{H_o}{D}$$

il en résulte

$$\frac{L}{l} = \frac{H_o}{D} \times \frac{D_c}{H_{oc}} = \frac{H_o}{V} \times \frac{V_c}{H_{oc}}$$

et alors l'équation du deuxième régime s'écrit

$$\left(\frac{H_o}{H_{oc}} \times \frac{V_c}{V} - 1 \right)^{1,36} = 1,6 \left(\frac{V}{V_c} - 1 \right)$$

L'équation du premier régime peut d'ailleurs s'écrire

$$\frac{H_o}{D} = \text{constante} = \frac{H_{oc}}{D_c}$$

ou bien

$$\frac{H_o}{H_{oc}} \times \frac{V_c}{V} - 1 = 0.$$

D'où l'énoncé suivant :

Théorème des états correspondants. — Pour des vitesses correspondantes, les charges absorbées par les frottements sont aussi correspondantes, quels que soient le tube et le liquide et cela pour les deux régimes.

Ce résultat très général va d'ailleurs trouver une confirmation intéressante dans le paragraphe suivant :

IX. — Représentation algébrique du deuxième régime dans la méthode du cylindre tournant. — J'ai montré que l'oscillation d'une colonne liquide dans un tube peut se faire suivant deux régimes et que chacun de ces régimes est représenté par une équation qui, en prenant pour unités de mesures les constantes critiques, est applicable à tous les tubes et à tous les liquides.

Dans l'étude de l'écoulement uniforme à travers un tube, j'ai été conduit à un résultat tout à fait analogue.

Naturellement j'ai alors cherché s'il en était de même dans d'autres méthodes employées pour l'étude du frottement interne des liquides.

Or M. Couette a montré l'existence de deux régimes dans le cas de l'entraînement d'un fluide compris entre deux cylindres de même axe : l'un fixe, l'autre tournant uniformément autour de son axe.

Il est évident *a priori* que ce cas présente une analogie étroite avec celui de l'écoulement uniforme dans un tube cylindrique. C'est ce qui résulte, du reste, de l'étude expérimentale très soi-

gnée qu'en a faite M. Couette. Les courbes représentatives des résultats dans les deux cas sont, en effet, tout à fait analogues.

Il est donc probable qu'une équation de même forme doit représenter le deuxième régime dans les deux cas. C'est ce que j'ai essayé de vérifier en utilisant les résultats de M. Couette qui, avec le même appareil, a expérimenté sur l'eau et sur l'air.

Dans le cas de l'eau, il désigne par P le poids qui, agissant sur la poulie, maintient le cylindre en équilibre pendant que le cylindre mobile fait N tours par minute. Ici P est l'analogue de H_0 dans l'écoulement par un tube et N l'analogue de la vitesse V . Dans le premier régime, le rapport $\frac{N}{P}$ conserve une valeur constante que je désigne par a jusqu'au point critique. Dans le deuxième régime, le rapport $\frac{P}{N}$ augmente avec la vitesse; je désigne par A la valeur variable de ce rapport. On a donc :

$$A = \frac{P}{N} \text{ deuxième régime; et } a = \frac{P_c}{N_c}$$

Dans le cas de l'air, l'équilibre du cylindre est obtenu par la torsion T de son fil de suspension. $\frac{T}{N}$ est variable pendant le deuxième régime : je le désigne par A ; $\frac{T}{N}$ est constant pendant le premier régime et égal à la valeur $\frac{T_c}{N_c} = a$ qu'il possède au point critique algébrique.

Si donc une équation de même forme que dans l'écoulement par les tubes s'applique à ces deux séries d'expériences, on doit avoir pour le deuxième régime :

$$\left(\frac{A}{a} - 1\right)^{1,36} = K \left(\frac{N}{N_c} - 1\right)$$

M. Couette donne dans ses tableaux d'expériences les valeurs de $\frac{P}{N}$ et de N_c . Ainsi

Dans le cas de l'eau $a = \frac{P_c}{N_c} = 0,2151$ $N_c = 55$

— l'air $a = \frac{T_c}{N_c} = 0,2915$ $N_c = 760$

J'ai alors calculé pour ces deux séries d'expériences (eau et air) les valeurs de l'expression

$$\left(\frac{A}{a} - 1\right)^{1,36} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left(\frac{P}{P_c} \cdot \frac{N_c}{N} - 1\right)^{1,36}$$

et celles de $\frac{N}{N_c}$.

Voici les résultats obtenus.

Expériences avec l'eau.

N	$\frac{P}{N}$	$\frac{N}{N_c}$	$\left(\frac{P}{0,2151N} - 1\right)^{1,36}$	$\left(2,6 \frac{N}{N_c} - 1\right)$
59,53	0,297	1,084	0,268	0,22
61,75	0,340	1,123	0,47	0,33
71,6	0,470	1,30	1,22	0,78
94,6	0,602	1,72	2,20	1,90
107,9	0,688	1,97	2,90	2,54
127,3	0,792	2,32	3,80	3,43
160,6	0,952	2,92	5,31	5,00
250	1,325	4,545	9,34	9,23
313	1,559	5,70	12,10	12,20
360	1,723	6,55	14,19	14,40
432	1,980	7,86	17,51	17,80
453,3	2,110	8,26	19,26	18,87

Expériences avec l'air.

N	$\frac{T}{N}$	$\frac{N}{N_c}$	$\left(\frac{T}{0,2915N} - 1\right)^{1,36}$	$2,6 \left(\frac{N}{N_c} - 1\right)$
941	4.511	1,24	0,44	0,60
1.057	5.762	1,39	0,96	1
1.178	6.787	1,55	1,43	1,43
1.317	7.532	1,73	1,84	1,89

Si on porte en ordonnées les nombres de l'avant-dernier des deux tableaux, c'est-à-dire les valeurs $\left(\frac{A}{a} - 1\right)^{1,36}$ et en abscisses les valeurs de $\frac{N}{N_c} - 1$, tous viennent se placer très sensiblement sur la droite

$$\left(\frac{A}{a} - 1\right)^{1,36} = 2,6 \left(\frac{N}{N_c} - 1\right)$$

La dernière colonne contient les valeurs de $2,6 \left(\frac{N}{N_c} - 1\right)$ et on voit que la concordance est satisfaisante entre l'expérience et le calcul si on rappelle cette observation de M. Couette : « Il est difficile avec cet appareil d'obtenir des mesures concordantes et précises quand on se rapproche du point critique. » On voit d'ailleurs que près du point critique l'accord est meilleur dans le cas de l'air que dans le cas de l'eau.

On voit donc que le type de formule trouvé dans le cas de l'écoulement uniforme au travers d'un tube s'applique encore à l'appareil à cylindres et, bien mieux, il s'applique non pas seulement aux liquides, mais aussi aux gaz.

L'exposant 1,36 est le même pour les deux genres d'appareils, mais nous ne devons pas nous étonner si le coefficient numérique du deuxième membre a changé, car si la nature du mouvement est restée la même, le genre d'appareil a été modifié.

Il est probable, d'après cela, que pour tous les appareils à mouvement uniforme le deuxième régime est représenté par une équation du type précédent, dans laquelle l'exposant 1,36 est toujours le même, tandis que le coefficient numérique du second membre γ est caractéristique du genre de l'appareil. Ceci est à rapprocher de ce qui a été dit plus haut à propos des expériences de Reynolds. L'équation représente le premier régime en remplaçant le deuxième membre par zéro.

Théorème des états correspondants. — L'équation du deuxième régime de l'appareil à cylindres s'écrit donc :

$$\left(\frac{P}{P_c} \cdot \frac{N_c}{N} - 1\right)^{1,36} = 2,6 \left(\frac{N}{N_c} - 1\right)$$

D'où, comme dans les cas de l'oscillation et de l'écoulement uniforme, un énoncé analogue :

Pour des vitesses correspondantes, les forces faisant équilibre aux frottements sont aussi correspondantes et cela pour les deux régimes et quel que soit le fluide.

Il est certain alors que l'énoncé relatif à l'écoulement s'applique, lui aussi, aux gaz.

Et on peut prévoir que les autres méthodes que l'on peut employer, soit à mouvement uniforme, soit à mouvement périodique, doivent conduire à des résultats analogues : par exemple, le disque oscillant entre deux disques fixes.

L'appareil à cylindres obéit d'ailleurs à une loi analogue à la loi de Reynolds sur la vitesse critique.

X. — Emploi du deuxième régime dans les appareils à mouvement uniforme pour la mesure du coefficient de frottement interne des liquides. — L'équation à laquelle nous a conduit l'étude du deuxième régime établit une relation entre le coefficient de frottement et les résultats de l'expérience.

Cette relation se prête-t-elle à la mesure de η ? Nous avons obtenu cette équation sous la forme

$$\left(\frac{L}{l} - 1\right)^{1,36} = 1,6 \left(\frac{V}{V_c} - 1\right) \quad (1)$$

$\frac{L}{l}$ étant donné par

$$\frac{L}{l} = \frac{\pi r^4 g H_o \mu}{8 \eta l D} \quad (2)$$

et on a aussi, d'autre part, la loi de Reynolds :

$$\frac{\mu r V_c}{\eta} = 1.000 \quad (3)$$

Il est évident que si on remplace dans l'équation (1) ci-dessus L et V_c par leurs valeurs, on obtient une équation en η très compliquée. Donc déjà l'équation se prête mal au calcul de η .

Cependant on peut y arriver en s'aidant de la construction préalable d'une table.

L'équation (1), en tenant compte de (2) et (3), peut, en effet, s'écrire :

$$1.000 \frac{r g H_o}{8 l V^2} = \frac{V_c}{V} \left[1 + 1,6^{0,735} \left(\frac{V}{V_c} - 1 \right)^{0,735} \right] \quad (4)$$

Construisons d'avance une table donnant les valeurs du second membre en fonction de $\frac{V}{V_c}$. Les données de l'expérience introduites dans le premier membre de l'équation permettent de le calculer; en cherchant dans la table la valeur ainsi calculée, on lit en face la valeur de $\frac{V}{V_c}$ de laquelle on déduit la valeur de V_c , puisque l'expérience a donné V (ou D , ce qui revient au même), et ensuite on calcule η au moyen de l'équation (3) de Reynolds.

Evidemment cela n'est pas simple. J'ai cependant voulu me rendre compte de ce que l'on obtient ainsi.

$(\times)$	$\frac{V}{V_c}$	Ci-contre se trouve ladite table, la colonne $(\times)$ donne la valeur du second membre de l'équation (4), en face la valeur correspondante de $\frac{V}{V_c}$.
1,232	1,5	
1,233	1,6	
1,227	1,7	
1,207	2	
1,161	2,5	
1,117	3	1 ^{er} Exemple. Tube $r = 0,1483$ déjà cité
1,043	4	$H_1 = 211,3 \quad V = 222 \quad l = 70,1$
0,983	5	on a
0,936	6	$1.000 \frac{rgH_1}{8lV^2} = 1,112 = (\times)$
0,896	7	
0,864	8	
0,836	9	la table donne alors
0,811	10	$\frac{V}{V_c} = 3,06$
0,789	11	
0,770	12	d'où
0,753	13	$V_c = 72,6$
0,737	14	
0,722	15	L'équation de Reynolds donne alors
0,709	16	$\eta = 0,0108$ au lieu de 0,0113 qu'il faut trouver. L'erreur est de $\frac{5}{110}$ alors que l'erreur sur
0,666	20	
0,625	25	
0,593	30	$\frac{L}{l}$ n'est que $\frac{3,5}{330}$ quatre fois plus petite.
0,567	35	

2^e Exemple.

$$r = 0,21225 \quad l = 71,3 \quad H_1 = 185,2 \quad V = 262$$

on a

$$1.000 \frac{rgH_1}{8lV^2} = 0,985 = (\times)$$

la table donne alors

$$\frac{V}{V_c} = 5 \quad \text{d'où } V_c = 52,4$$

La formule de Reynolds donne alors

$$\eta = 0,0112 \text{ au lieu de } 0,0118.$$

3^e *Exemple*. Même tube.

$$H_1 = 174,25 \quad V = 252$$

d'où

$$1.000 \frac{rgH_1}{8lV^2} = 1,002 = (\infty)$$

La table donne

$$\frac{V}{V_c} = 4,66 \quad \text{d'où } V_c = 54,1$$

d'où

$$\eta = 0,0115 \text{ au lieu de } 0,0118.$$

Ces trois exemples donnent des valeurs de η par défaut; d'autres, choisis dans les tableaux, m'ont donné des η par excès; de même en prenant des exemples de M. Couette.

Du côté calcul, la méthode est donc mal commode; il en est de même du côté expérimental, car les erreurs commises dans les mesures ont ici une grande influence sur la valeur calculée pour η . Supposons, en effet, que $\frac{V}{V_c}$ et par suite $\frac{L}{l}$ soient très grands par rapport à 1, alors la formule (4) s'écrit :

$$1.000 \frac{rgH_o}{8lV} = 1,6^{0,735} V_c \left(\frac{V}{V_c} \right)^{0,735}$$

qui en tenant compte de la loi de Reynolds et de $\pi r^2 V = D$ s'écrit :

$$\left(\frac{\eta}{\mu} \right)^{0,265} = 14,2 \frac{\pi^{1,735} g H_o r^{4,735}}{l D^{1,735}}$$

ou bien

$$\frac{\eta}{\mu} = K \frac{H_o^{3,773} r^{17,87}}{l^{3,773} D^{6,55}} \quad (K \text{ facteur numérique.})$$

Il est certain qu'avec des exposants aussi élevés, les mesures ont besoin d'être très précises.

Or ici la mesure de D est particulièrement difficile, car le débit est notable quand on doit se placer un peu loin au-dessus du point critique avec des tubes assez larges pour donner le deuxième régime sous des pressions pas trop élevées.

Donc on peut dire que si théoriquement la méthode est admissible, pratiquement elle est mal commode et manque de précision.

Je rapporterai cependant brièvement deux expériences que j'ai faites : l'une sur l'alcool dénaturé déjà employé, l'autre sur l'éther ordinaire.

Expérience sur l'éther.

$$r = 0,2807 \quad l = 54\text{cm} \quad t = 14^{\circ}5$$

$$\text{Débit } D = 42\text{cm}^3 \quad \text{d'où } V = 170.$$

$$\text{Charge totale } H = 55\text{cm}.$$

Correction à l'entrée

$$\varepsilon = \frac{1,49 D^2}{2g\pi^2 r^4} = 21,9$$

$$H_0 = 55 - 21,9 = 33,1.$$

On a alors

$$1,000 \frac{\eta g H_0}{8lV^2} = 0,727.$$

D'où d'après la table donnant ($\times$) en fonction de $\frac{V}{V_c}$.

$$\frac{V}{V_c} = 14,6$$

et par suite

$$V_c = 11 \frac{\text{cm}}{\text{sec}6}.$$

L'équation de Reynolds donne alors

$$\eta = 0,00238.$$

Le même éther m'a donné par la méthode d'oscillation

$$\eta = 0,00257.$$

Expérience avec l'alcool dénaturé.

$$r = 0,2807 \quad l = 32,8 \quad t = 13^{\circ}6$$

Débit = 41,4; d'où $V = 167,4$.

Charge totale : $H = 54,4$.

Correction à l'entrée : $\varepsilon = 21,27$.

$$H_o = 54,4 - 21,27 = 33,13.$$

On a alors

$$\frac{1.000 \eta g H_o}{8 l V^2} = 1,233.$$

D'après la table donnant ($\times$), on a

$$\frac{V}{V_c} = 1,6$$

$$\text{d'où : } V_c = 104,6.$$

L'équation de Reynolds donne alors

$$\eta = 0,0246 \text{ à } 13^{\circ}6.$$

Le même alcool a donné précédemment

$$\eta = 0,0211 \text{ à } 16^{\circ}5.$$

Ces deux expériences fournissent encore une vérification satisfaisante de notre équation du deuxième régime.

On peut, d'une façon analogue, employer l'équation du deuxième régime de l'appareil à cylindres, mais évidemment les inconvénients y sont les mêmes que dans le cas des tubes.

La loi de Reynolds a son analogue dans le cas de l'appareil à cylindres. — Il suffit pour s'en rendre compte de calculer l'expression $\frac{\mu N_c}{\eta}$ avec les résultats obtenus par M. Couette avec l'eau et avec l'air (M. Brillouin le ¹signale, d'ailleurs, dans son livre).

$$\text{On obtient avec l'eau : } \frac{\mu N_c}{\eta} = \frac{1 \times 55}{0,01096} = 5.020.$$

$$\text{— avec l'air : } \frac{\mu N_c}{\eta} = \frac{0,0012 \times 760}{0,000180} = 5.060.$$

La loi de Reynolds, pour les appareils à mouvement uniforme, s'applique donc à tous les fluides.

Il est probable, d'après cela, que la loi analogue

$$V_c = \frac{1}{4} \frac{\mu}{\eta} r^2$$

que j'ai donnée pour les appareils à mouvement oscillatoire dans le cas des liquides est vraie aussi pour tous les fluides.

CONCLUSIONS RELATIVES A L'ETUDE DE L'ECOULEMENT UNIFORME

Point critique. — J'ai d'abord vérifié la loi de Reynolds :

$$\frac{\mu r V_c}{\eta} = 1.000$$

donnant la valeur de la vitesse critique.

Loi comparable à celle que j'ai donnée pour définir le point critique dans le cas du mouvement oscillatoire.

Etude du premier régime.

1° J'ai d'abord vérifié ce résultat déjà connu :

L'équation de Poiseuille est applicable à un tube de dimensions quelconques dans le premier régime, pourvu que l'on élimine par un dispositif expérimental convenable la perte de charge à l'entrée.

2° J'ai montré, d'après mes propres expériences, que le premier régime est représenté dans tous les cas par la formule générale (pour le tube entier) :

$$\eta = \frac{\pi r^4 g \mu}{8/D} \left(H - K_1 \frac{D^2}{\pi^2 r^4 g} \right)$$

formule qui se montre d'accord avec les expériences de Poiseuille (2^{me} série) et de M. Couette.

3° Correction à l'entrée. Il en résulte que la perte de charge à l'entrée (exprimée en colonne du liquide étudié) a pour valeur

$$\varepsilon_1 = K_1 \frac{D^2}{\pi^2 r^4 g}$$

entre les valeurs du rayon $r = 0$ et $r = 0,3$, le coefficient K_1 est bien représenté par

$$K_1 = 1 + 0,65 \sqrt{r}.$$

Etude du deuxième régime.

1° J'ai vérifié d'abord que dans le deuxième régime la perte de charge à l'entrée est bien représentée par l'expression connue

$$\varepsilon_2 = \frac{1,49 D^2}{2g \pi^2 r^4}.$$

2° D'après mes propres expériences effectuées les unes en éliminant la perte de charge à l'entrée, les autres sans l'éliminer, j'ai établi que le deuxième régime est représenté par la formule générale

$$(1) \quad \left(\frac{H_o}{H_c} \frac{V_c}{V} - 1 \right)^{1,36} = 1,6 \left(\frac{V}{V_c} - 1 \right)$$

Cette formule s'applique, en effet, à **l'écoulement à travers les tubes, quel que soit le tube et quel que soit le fluide.**

Elle s'accorde avec les expériences de Bossut et celles de M. Couette.

Elle représente même le premier régime en remplaçant le second membre par zéro.

3° Ce type de formule est applicable à **tous les appareils à mouvement uniforme du fluide.**

Je l'ai montré en utilisant, d'une part, les expériences de M. Couette effectuées avec l'appareil à cylindres sur l'eau et sur l'air, d'autre part, les expériences de Reynolds (écoulement par les tubes).

Quel que soit le type d'appareil, l'exposant 1,36 reste le même; seul le coefficient numérique du deuxième membre varie avec le genre d'appareil.

4° Cette formule établit une relation entre le coefficient de frottement η et le deuxième régime, puisqu'elle s'écrit

$$\left(\frac{\pi r^4 g \mu H_o}{8 \eta l D} - 1 \right)^{1,36} = 1,6 \left(\frac{V}{V_c} - 1 \right)$$

avec

$$V_c = \frac{1.000 \eta}{\mu r}$$

Mais au point de vue du calcul, elle est mal commode.

5° Sous la forme (1) ci-dessus, l'équation ne renferme que les valeurs $\frac{H_o}{H_c}$ et $\frac{V}{V_c}$, charge et vitesse exprimées en fonction des valeurs critiques de ces mêmes quantités (aussi bien dans le cas des tubes que dans le cas du cylindre tournant); elle donne donc lieu à un énoncé tout à fait analogue à celui obtenu dans le cas du mouvement oscillatoire.

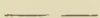
LOI DES ETATS CORRESPONDANTS. — Pour des vitesses correspondantes, les charges (ou les forces) absorbées par les frottements sont aussi correspondantes, quels que soient le tube et le fluide et cela pour les deux régimes.

N.-B. — Voir plus haut les conclusions sur le mouvement oscillatoire d'une colonne de liquide dans un tube en U.

SECONDE THÈSE



PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ



Isomérisie des composés du Platine.

Vu et approuvé :

Paris, le 20 décembre 1910.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

P. APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

